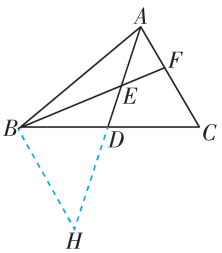
专题三　全等三角形模型

模型 7　倍长中线模型

1.【证明】如图，延长 AD 到点 H，使 $DH=AD$，连接 BH.



在 $\triangle BDH$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$$\begin{cases} DH=DA, \\ \angle BDH=\angle CDA, \\ BD=CD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDH\cong\triangle CDA(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BH=AC$，$\angle CAD=\angle H$.

又$\because AF=EF$，$\therefore \angle CAD=\angle AEF$.

又$\because \angle BEH=\angle AEF$，

$\therefore \angle CAD=\angle BEH$，

$\therefore \angle H=\angle BEH$，$\therefore BH=BE$，

$\therefore AC=BE$.

2. D　【解析】延长 AD 到 E，使得 $ED=AD=4$，连接 CE，则 $AE=2AD=8$. $\because D$ 是 BC 的中点，$\therefore BD=CD$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中，$\begin{cases} AD=ED, \\ \angle ADB=\angle EDC, \\ BD=CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ECD(\mathrm{SAS})$，$\therefore AB=EC$. 在 $\triangle ACE$ 中，$AE-AC<EC<AE+AC$，即 $8-3<EC<8+3$，$\therefore 5<EC<11$，$\therefore 5<AB<11$. 过 C 作 $CE/\!/AB$ 交 AD 的延长线于 E，则 $\angle BAD=\angle E$. $\because D$ 是 BC 的中点，$\therefore BD=CD$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$\begin{cases} \angle BAD=\angle E, \\ \angle ADB=\angle EDC, \\ BD=CD, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABD\cong\triangle ECD(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AB=EC$，$AD=ED=4$，$\therefore AE=2AD=8$. 在 $\triangle ACE$ 中，$AE-AC<EC<AE+AC$，即 $8-3<EC<8+3$，$\therefore 5<EC<11$，$\therefore 5<AB<11$. 综上所述，甲的说法错误，乙和丙的说法正确. 故选 D.

3. $\sqrt{51}-1$　**【解析】**如图，延长 MD 至点 E，使 $DE=DM$，连接 BE，CE.

$\because D$ 为 AB 的中点，$\therefore AD=DB$.

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle BED$ 中，$\begin{cases} AD=DB, \\ \angle ADM=\angle BDE, \\ DM=DE, \end{cases}$

$\therefore \triangle AMD\cong\triangle BED(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BE=AM$，$\angle DBE=\angle A$.

$\because \angle ACB=90°$，

$\therefore \angle A+\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle DBE+\angle ABC=90°$，

即 $\angle EBC=90°$.

$\because CD\perp MD$，$DM=DE$，

$\therefore CE=CM$.

设 $CM=x$，则 $CE=x$，$AC=2+x$.

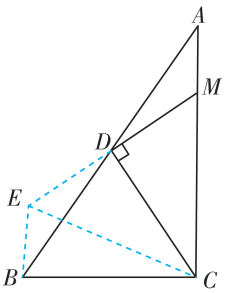
在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中，$BC^2=CE^2-BE^2=x^2-2^2$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC^2=AB^2-AC^2=10^2-(x+2)^2$，

$\therefore x^2-2^2=10^2-(x+2)^2$.

解得 $x=\sqrt{51}-1$（负值已舍去），

$\therefore CM=\sqrt{51}-1$. 故答案为 $\sqrt{51}-1$.



4. 13　**【解析】**如图，延长 FD 至点 P，使得 $DP=DF$，连接 BP，EP，过点 E 作 $EQ\perp FD$ 于点 Q. 在 $\triangle BDP$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases} BD=CD, \\ \angle BDP=\angle CDF, \\ PD=FD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDP\cong\triangle CDF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore BP=CF$，$\angle PBD=\angle C$.

$\because \angle C+\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle PBD+\angle ABC=90°$，

即 $\angle ABP=90°$.

$\because BE=CF$，$\therefore BE=BP$，

$\therefore \triangle BEP$ 为等腰直角三角形，

$\therefore EP=\sqrt{2}BE$.

$\because \angle ABC+\angle C=90°$，$BD=BE=CD=CF$，

$\therefore \angle BDE+\angle CDF=\frac{1}{2}(180°+180°-90°)=135°$，

$\therefore \angle EDQ=45°$.

$\because ED=7\sqrt{2}$，

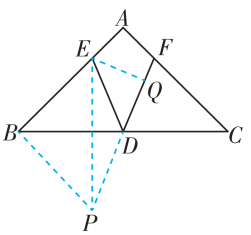
$\therefore EQ=DQ=7$，

$\therefore PQ=DQ+DP=DQ+DF=17$，

$\therefore EP=\sqrt{EQ^2+PQ^2}=13\sqrt{2}$，

$\therefore BE=13$.

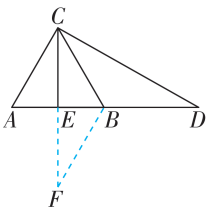
故答案为 13.



思路分析

已知 D 是 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点，运用“间接倍长法”，延长 FD 至点 P，使 $DP=DF$，连接 EP,BP. 通过推导可知 $\triangle BEP$ 为等腰直角三角形. 作 $EQ\perp FD$ 于 Q，求出 PQ,EP 的长，即可得到 BE 的长.

5.【证明】如图，延长 CE 至点 F，使 $EF=CE$，连接 FB.



$\because CE$ 是$\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore AE=BE$.

在$\triangle AEC$ 和$\triangle BEF$ 中，

$$\begin{cases}AE=BE,\\ \angle AEC=\angle BEF,\\ EC=EF,\end{cases}\therefore \triangle AEC\cong\triangle BEF,$$

$\therefore \angle A=\angle EBF, AC=BF. \because \angle ABC=\angle ACB,$

$\therefore \angle CBD=\angle A+\angle ACB=\angle EBF+\angle ABC=\angle CBF$.

$\because CB$ 是$\triangle ADC$ 的中线，$\therefore AB=BD$.

又 $AB=AC, AC=BF, \therefore BF=BD$.

在$\triangle CBF$ 和$\triangle CBD$ 中，$\begin{cases}CB=CB,\\ \angle CBF=\angle CBD,\\ BF=BD,\end{cases}$

$\therefore \triangle CBF\cong\triangle CBD, \therefore CD=CF=CE+FE=2CE$，

即 $CD=2CE$.

6.（1）①**【证明】**$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD=CD$.

在$\triangle ADB$ 和$\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases}BD=CD,\\ \angle ADB=\angle CDE\text{（对顶角相等）},\\ AD=DE,\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ECD$(SAS).

②**【解】**由①知，$\triangle ABD\cong\triangle ECD, \therefore CE=AB$.

$\because AB=5, \therefore CE=5. \because ED=AD, AD=x$，

$\therefore AE=2AD=2x$.

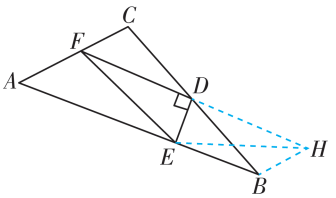
在$\triangle ACE$ 中，$AC=3$，

根据三角形的三边关系，得 $5-3<2x<5+3$，

$\therefore 1<x<4$. 故答案为 $1<x<4$.

（2）**【证明】**如图，延长 FD，使 $DH=DF$，连接 BH,EH.

$\because D$ 是 BC 边上的中点，$\therefore BD=CD$.



$\because DH=DF$，

$\angle BDH=\angle CDF$，

$\therefore \triangle BDH\cong\triangle CDF$(SAS)，

$\therefore CF=BH$.

$\because DH=DF, DE\perp DF$，

$\therefore EH=EF$.

又 $\because BE+BH>EH, \therefore BE+CF>EF$.

思路分析

（1）利用“直接倍长法”；（2）D 是 BC 边的中点，利用“间接倍长法”，根据全等三角形的判定和性质及三角形的三边关系求解.

7.【解】（1）$\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的中线，$\therefore BD=CD$.

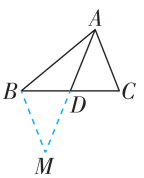
在$\triangle ADC$ 和$\triangle MDB$ 中，$\begin{cases}CD=BD,\\ \angle CDA=\angle BDM,\\ AD=MD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle MDB$(SAS)，

$\therefore AC=BM, \angle CAD=\angle M, \therefore AC/\!/BM$，

故答案为 $AC=BM, AC/\!/BM$.

（2）如图（1），延长 AD 到 M，使 $DM=AD$，连接 BM.



图（1）

由（1）可知，$\triangle MDB\cong\triangle ADC$(SAS)，$\therefore BM=AC=8$.

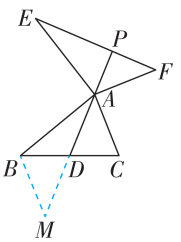
在$\triangle ABM$ 中，$AB-BM<AM<AB+BM$，

$\therefore 12-8<AM<12+8$，

即 $4<2AD<20, \therefore 2<AD<10$，即 BC 边上的中线 AD 的取值范围为 $2<AD<10$.

（3）$EF=2AD, EF\perp AD$，理由如下：

如图（2），延长 AD 到 M，使得 $DM=AD$，连接 BM.



图（2）

由（1）可知 $BM=AC, AC/\!/BM$，

$\therefore \angle BAC+\angle ABM=180°$.

$\because AC=AF, \therefore BM=AF$.

$\because AE\perp AB, AF\perp AC$，

$\therefore \angle BAE=\angle FAC=90°$，

$\therefore \angle BAC+\angle EAF=180°$，

$\therefore \angle ABM=\angle EAF$.

在△ABM和△EAF中，$\begin{cases}AB=EA,\\ \angle ABM=\angle EAF,\\ BM=AF,\end{cases}$

∴ △ABM≌△EAF(SAS)，

∴ $AM=EF$，$\angle BAM=\angle E$.

∵ $AD=DM$，∴ $AM=2AD$，∴ $EF=2AD$.

∵ $\angle EAM=\angle BAM+\angle BAE=\angle E+\angle APE$，

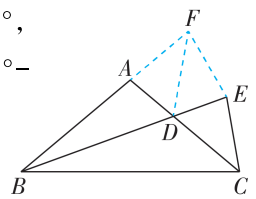
∴ $\angle APE=\angle BAE=90°$，∴ $EF\perp AD$.

模型 8　截长补短模型

1.【证明】延长 BA 到 F，使 $BF=BC$，连接 EF，FD，如图.

∵ 在△ABC中，$\angle BAC=100°$，$\angle ABC=40°$，∴ $\angle ACB=180°-\angle BAC-\angle ABC=40°$.

∵ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，∴ $\angle ABD=\angle CBD=20°$，



∴ $\angle BDC=\angle BAC+\angle ABD=100°+20°=120°$，

∴ $\angle ADE=\angle BDC=120°$.

在△FBD和△CBD中，$\begin{cases}BF=BC,\\ \angle FBD=\angle CBD,\\ BD=BD,\end{cases}$

∴ △FBD≌△CBD(SAS)，

∴ $\angle BDF=\angle BDC=120°=\angle ADE$.

∵ 在△ABD中，$\angle BAD=100°$，$\angle ABD=20°$，

∴ $\angle ADB=180°-100°-20°=60°$，

∴ $\angle ADF=\angle BDF-\angle ADB=120°-60°=60°$，

∴ $\angle EDF=120°-60°=60°=\angle ADF$.

在△ADF和△EDF中，$\begin{cases}AD=DE,\\ \angle ADF=\angle EDF,\\ DF=DF,\end{cases}$

∴ △ADF≌△EDF(SAS)，∴ $AF=EF$.

在△FBE和△CBE中，$\begin{cases}BF=BC,\\ \angle FBE=\angle CBE,\\ BE=BE,\end{cases}$

∴ △FBE≌△CBE(SAS)，

∴ $EF=CE$，∴ $CE=AF$，

∴ $BC=BF=AB+AF=AB+CE$，

即 $BC=AB+CE$.

2.（1）【解】∵ $\angle CAB=120°$，$AC=AB$，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=30°$.

∵ $\angle ADC=\alpha$，

∴ $\angle DAB=\angle ADC-\angle B=\alpha-30°$，$\angle ADB=180°-\alpha$.

∵ 将△ABD沿 AD 所在的直线折叠得到△AED，

∴ $\angle ADB=\angle ADE=180°-\alpha$，

$\angle DAB=\angle DAE=\alpha-30°$，$AB=AE=AC$，

∴ $\angle CDE=180°-\alpha-\alpha=180°-2\alpha$，

$\angle CAE=120°-2(\alpha-30°)=180°-2\alpha$，

∴ $\angle AEC=\dfrac{180°-(180°-2\alpha)}{2}=\alpha$.

（2）①【解】如图（1），过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H.

∵ $\angle ADC=45°$，$AH\perp BC$，

∴ $\angle ADC=\angle DAH=45°$，

∴ $AH=HD$.

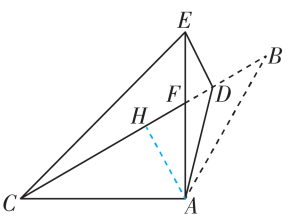
∵ $AD=2$，∴ $AH=HD=\sqrt{2}$.

∵ $\angle ACB=30°$，

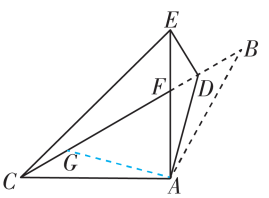
∴ $AC=2AH=2\sqrt{2}$.

∵ $\angle CAE=180°-2\alpha=90°$，$\angle AEC=\alpha=45°$，

∴ $CE=\sqrt{2}AC=4$.



图（1）



图（2）

②【证明】如图（2），在 CB 上截取 $CG=ED$，连接 AG.

∵ $\angle DEA=\angle B=\angle GCA$，$AE=AC$，$CG=ED$，

∴ △ADE≌△AGC(SAS)，

∴ $AG=AD$，$\angle GAC=\angle DAE$，

∴ $\angle DAG=\angle DAE+\angle EAG=\angle GAC+\angle EAG=90°$，

∴ $\angle AGD=\angle ADG=45°$，

∴ $GD=\sqrt{2}AD$.

∵ $CD=CG+DG$，∴ $DC-DE=\sqrt{2}AD$.

3.（1）【解】∵ 线段 AB 绕点 A 逆时针旋转 α 至 AD，$\alpha=20°$，

∴ $\angle BAD=20°$，$AB=AD$，

$\therefore \angle ADB=\angle ABD=\frac{1}{2}\times(180°-20°)=80°.$

又$\because \angle BAC=90°,\therefore \angle DAC=70°.$

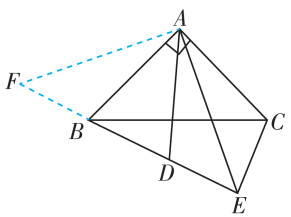
$\because AE$ 平分$\angle DAC$,

$\therefore \angle DAE=\frac{1}{2}\angle DAC=35°$,

$\therefore \angle AEB=\angle ADB-\angle DAE=80°-35°=45°.$

(2)【证明】如图(1),延长 DB 到 F,使 $BF=CE$,连接 AF.

$\because AB=AC,AD=AB,\therefore AD=AC.$



图(1)

$\because AE$ 平分$\angle DAC,\therefore \angle DAE=\angle CAE.$

又$\because AE=AE,\therefore \triangle ADE\cong\triangle ACE(\mathrm{SAS})$,

$\therefore \angle DEA=\angle CEA,\angle ADE=\angle ACE,DE=CE.$

$\because AB=AD,\therefore \angle ABD=\angle ADB.$

$\because \angle ADE+\angle ADB=180°$,

$\therefore \angle ACE+\angle ABD=180°.$

$\because \angle BAC=90°$,

$\therefore \angle BEC=360°-(\angle ACE+\angle ABD)-\angle BAC=360°-180°-90°=90°$,

$\therefore \angle DEA=\angle CEA=\frac{1}{2}\times90°=45°.$

$\because \angle ABF+\angle ABD=180°,\angle ACE+\angle ABD=180°$,

$\therefore \angle ABF=\angle ACE.$

$\because AB=AC,BF=CE,\therefore \triangle ABF\cong\triangle ACE(\mathrm{SAS})$,

$\therefore AF=AE,\angle AFB=\angle AEC=45°$,

$\therefore \angle FAE=180°-45°-45°=90°.$

在 Rt$\triangle AFE$ 中,$\angle FAE=90°,\cos\angle AEF=\frac{AE}{EF}$,

$\therefore EF=\frac{AE}{\cos\angle AEF}=\frac{AE}{\cos 45°}=\sqrt{2}AE.$

$\because EF=BF+BD+DE=CE+BD+CE=BD+2CE$,

$\therefore BD+2CE=\sqrt{2}AE.$

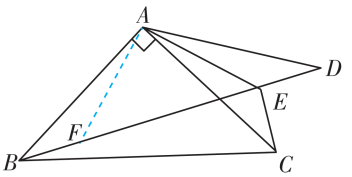
(3)【解】当$0°<\alpha<90°$时,

由(2)可知 $BD+2CE=\sqrt{2}AE,CE=DE.$

$\because AE=2CE,\therefore BD+2DE=2\sqrt{2}DE$,

$\therefore \frac{BD}{DE}=2\sqrt{2}-2$;

如图(2),当$90°<\alpha<180°$时,



图(2)

在 BD 上截取 $BF=DE$,连接 AF,同(2)可证$\triangle ADE\cong\triangle ACE(\mathrm{SAS}),\therefore DE=CE.$

$\because AB=AD$,

$\therefore \angle ABF=\angle ADE$,

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ADE(\mathrm{SAS})$,

$\therefore AF=AE,\angle BAF=\angle DAE.$

又$\because \angle DAE=\angle CAE$,

$\therefore \angle BAF=\angle CAE$,

$\therefore \angle EAF=\angle FAC+\angle CAE=\angle FAC+\angle BAF=\angle BAC=90°$,

$\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形,$\therefore EF=\sqrt{2}AE$,

$\therefore BD=BF+DE+EF=2DE+\sqrt{2}AE.$

$\because AE=2CE=2DE$,

$\therefore BD=2DE+2\sqrt{2}DE$,

$\therefore \frac{BD}{DE}=2\sqrt{2}+2.$

综上所述,$\frac{BD}{DE}$的值为 $2\sqrt{2}+2$ 或 $2\sqrt{2}-2$.

4.【解】(1)由表格可得当 $AE=3.60,DE=1.37,BD=2.23$ 时,有 $3.60=1.37+2.23$,即 $AE=DE+BD$;

当 $AE=3.58,DE=1.51,BD=2.07$ 时,有 $3.58=1.51+2.07$,即 $AE=DE+BD$;

当 $AE=3.56,DE=1.63,BD=1.93$ 时,有 $3.56=1.63+1.93$. 即 $AE=DE+BD$;

当 $AE=3.51,DE=1.91,BD=1.60$ 时,有 $3.51=1.91+1.60$,即 $AE=DE+BD$.

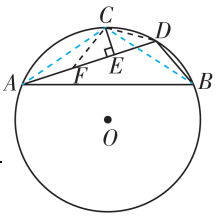
因此线段 ED,DB,AE 的数量关系为 $AE=DE+BD$.

故答案为 $AE=DE+BD$.

(2)如图(1),连接 BC,AC.

∵ $CE\perp AD$, $EF=DE$, ∴ $CF=CD$, ∴ $\angle CFE=\angle CDE$,

∴ $\angle ACF=\angle CFE-\angle CAE=\angle CDE-\angle CAE=\angle CBA-\angle CAE$.



图（1）

∵ ⊙O 中，点 C 是劣弧 AB 的中点，

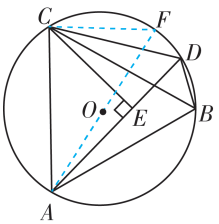
∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$, ∴ $AC=BC$, ∴ $\angle CAB=\angle CBA$.

又∵ $\angle BCD=\angle BAD=\angle CAB-\angle CAE$,

∴ $\angle BCD=\angle ACF$, ∴ $\triangle BCD\cong\triangle ACF$(SAS),

∴ $AF=BD$, ∴ $AE=AF+EF=DE+BD$.

(3)如图(2)，作直径 AF，连接 CF.



图（2）

∵ 等边三角形 ABC 内接于⊙O, ∴ $\angle ABC=\angle ADC=\angle F=60°$, $AC=BC$,

∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

∵ $CE\perp AD$,

∴ $CE=DE\cdot\tan\angle ADC=DE\cdot\tan\angle 60°=\sqrt{3}DE$.

∵ $CE\perp AD$, $\angle CAE=\angle CBD=45°$,

∴ $\angle ACE=90°-\angle CAE=45°=\angle CAE$,

∴ $AE=CE$.

同理(2)可证得 $AE=DE+BD$.

∵ $BD=\sqrt{3}-1$,

∴ $AE=CE=DE+BD=DE+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}DE$,

∴ $DE=1$, $AE=\sqrt{3}$,

∴ $AC=\dfrac{AE}{\cos\angle CAE}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 45°}=\sqrt{6}$.

∵ AF 是⊙O 的直径, ∴ $\angle ACF=90°$,

∴ $AF=\dfrac{AC}{\sin F}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60°}=2\sqrt{2}$,

∴ ⊙O 的半径为 $\dfrac{1}{2}AF=\sqrt{2}$.

模型 9　一线三等角模型

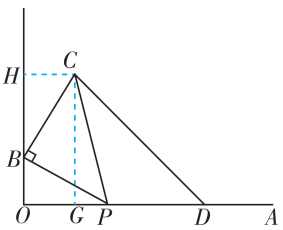
1. 3　【解析】∵ $BE\perp AD$, $CF\perp AD$, ∴ $\angle BEA=\angle AFC=90°$, ∴ $\angle BAE+\angle ABE=90°$. ∵ $\angle BAC=90°$, ∴ $\angle BAE+\angle FAC=90°$, ∴ $\angle FAC=\angle ABE$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAF$ 中，$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFC,\\ \angle ABE=\angle CAF,\\ AB=AC,\end{cases}$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle CAF$(AAS), ∴ $AF=BE$, $AE=CF$.

∵ $BE=4$, $CF=1$, ∴ $AF=BE=4$, $AE=CF=1$,

∴ $EF=AF-AE=4-1=3$, 故答案为 3.

2. D　【解析】过点 C 作 $CH\perp OB$ 交 OB 延长线于 H, $CG\perp OA$ 于 G, 如图，则 $CH=OG$.



∵ $\triangle CBP$ 是等腰直角三角形, $\angle CBP=90°$, ∴ $BC=BP$, $\angle HBC+\angle OBP=90°$. ∵ $\angle CBH+\angle HCB=90°$, ∴ $\angle OBP=\angle HCB$.

在 $\triangle OBP$ 和 $\triangle HCB$ 中，$\begin{cases}\angle O=\angle BHC,\\ \angle OBP=\angle HCB,\\ BP=BC,\end{cases}$

∴ $\triangle OBP\cong\triangle HCB$(AAS), ∴ $OB=CH=4$, $OP=HB$. ∵ $\angle ODC=45°$, $CG\perp OD$, ∴ $\triangle GCD$ 是等腰直角三角形, ∴ $CG=DG$, ∴ $PD=GD-PG=CG-(OP-4)=4+OP-(OP-4)=8$, ∴ PD 的长度保持不变，故选 D.

关键点拨

添加辅助线构造同侧直角型一线三等角，证 $\triangle OBP\cong\triangle HCB$(AAS)，利用全等三角形的判定及性质和等腰直角三角形的性质求得 PD 的长度.

3. 3　【解析】∵ $AB=AC$, ∴ $\angle B=\angle C$. ∵ $\angle ADE=\angle B$, $\angle BAD=180°-\angle B-\angle ADB$, $\angle CDE=180°-\angle ADE-\angle ADB$, ∴ $\angle BAD=\angle CDE$. ∵ AE 的垂直平分线交 BC 于点 D, ∴ $AD=ED$. 在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle DCE$ 中，$\begin{cases}\angle BAD=\angle CDE,\\ \angle B=\angle C,\\ AD=DE,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABD\cong\triangle DCE$(AAS), ∴ $CD=AB=9$, $BD=CE$. ∵ $CD=3BD$, ∴ $CE=BD=3$. 故答案为 3.

思路分析

$AB=AC$, $\angle ADE=\angle B=\angle C$, 符合一线三等角模型，易证 $\triangle ABD\cong\triangle DCE$(AAS)，根据全等三角形的性质得到 $CD=AB$, $BD=CE$, 进而得到结论.

4. 2. 5　【解析】∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是等边三角

形，∴ $DE=EF$，$AB=BC$，$\angle DEF=\angle B=\angle ACB=60°$. ∵ $\angle DEC=\angle BDE+\angle B=\angle DEF+\angle FEG$，∴ $\angle BDE=\angle FEG$. ∵ $FG//AC$，∴ $\angle FGE=\angle ACB=60°=\angle EBD$. ∵ CF 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle FCG=30°$. 在 $\triangle BED$ 和 $\triangle GFE$ 中，

$$\begin{cases}\angle EBD=\angle FGE,\\ \angle BDE=\angle FEG,\\ DE=EF,\end{cases}$$

∴ $\triangle BED\cong\triangle GFE$（AAS），

∴ $BE=FG$，$BD=EG$. ∵ $\angle EGF=\angle GFC+\angle FCG$，∴ $\angle GFC=\angle FCG=30°$，∴ $FG=CG=BE$. ∵ $AB=BC$，$BD=EG$，∴ $AD=AB-BD=BE+CG=2BE=5$，∴ $BE=2.5$. 故答案为 2.5.

思路分析

$DE=EF$，$\angle DEF=\angle B=\angle ACB=60°$，符合一线三等角模型，易证$\triangle BED\cong\triangle GFE$（AAS），根据全等三角形的判定及性质、等角对等边得到$FG=CG=BE$，从而得出结论.

5. 40 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AB=CD$，$AD=BC$，$\angle B=\angle C=90°$. ∵ 矩形 $ABCD$ 的周长为 26，∴ $AB+BC=13$. ∵ $AE\perp EF$，∴ $\angle AEF=90°$，∴ $\angle AEB+\angle CEF=90°$. ∵ $\angle AEB+\angle BAE=90°$，∴ $\angle BAE=\angle CEF$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle C,\\ \angle BAE=\angle CEF,\\ AE=EF,\end{cases}$$

∴ $\triangle ABE\cong\triangle ECF$（AAS），∴ $AB=EC$. ∵ $AB+BC=13$，∴ $AB+BE+EC=13$，∴ $AB+3+AB=13$，∴ $AB=5$，∴ $BC=8$，∴ $S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=5\times8=40$，故答案为 40.

思路分析

$\angle B=\angle C=\angle AEF$，$AE=EF$，符合一线三等角模型，易证$\triangle ABE\cong\triangle ECF$（AAS），根据全等三角形的判定与性质及矩形周长计算 AB 和 BC 的长，从而求出面积.

6. 7 【解析】∵ $\angle ABC=\angle ADB=120°$，

∴ $\angle DAB+\angle ABD=\angle ABD+\angle CBE=60°$，

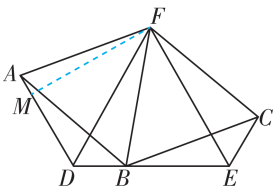
∴ $\angle CBE=\angle DAB$.

∵ $AB=BC$，$\angle ADB=\angle BEC=120°$，

∴ $\triangle ADB\cong\triangle BEC$（AAS），

∴ $BE=AD=5$，$BD=CE=3$.

如图，过点 F 作 $FM\perp AD$ 于 M.



∵ $\triangle ABF$ 和 $\triangle BCF$ 均为等边三角形，

∴ $BF=AF=CF$，

$\angle BAF=\angle FBC=60°$，

∴ $\angle FAD=\angle FBE$.

在$\triangle FAD$和$\triangle FBE$中，$\begin{cases}AF=BF,\\ \angle FAD=\angle FBE,\\ AD=BE,\end{cases}$

∴ $\triangle FAD\cong\triangle FBE$（SAS），

∴ $DF=EF$.

在$\triangle BDF$和$\triangle CEF$中，$\begin{cases}DF=EF,\\ BD=CE,\\ BF=CF,\end{cases}$

∴ $\triangle BDF\cong\triangle CEF$（SSS），

∴ $\angle BFD=\angle CFE$.

∵ $\angle BFC=60°$，∴ $\angle DFE=60°$，

∴ $\triangle DFE$ 是等边三角形，

∴ $DF=DE=8$，$\angle EDF=60°$.

∵ $\angle ADB=120°$，∴ $\angle ADF=60°$，

∴ Rt$\triangle FDM$ 中，$\angle DFM=30°$，

∴ $DM=\frac{1}{2}DF=4$，

∴ $FM=4\sqrt{3}$，$AM=5-4=1$.

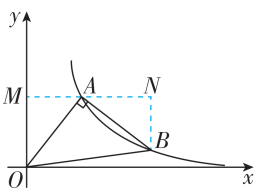
由勾股定理得 $AF=\sqrt{AM^2+FM^2}=\sqrt{1^2+(4\sqrt{3})^2}=7$.

故答案为 7.

思路分析

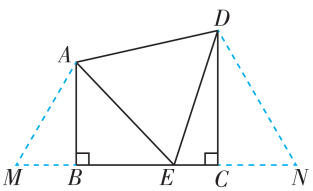
$\angle ABC=\angle ADB=\angle BEC$，$AB=BC$，符合一线三等角模型，易证$\triangle ADB\cong\triangle BEC$（AAS），根据全等三角形的判定与性质及等边三角形的性质易证$\triangle FAD\cong\triangle FBE$（SAS）和$\triangle BDF\cong\triangle CEF$（SSS），由勾股定理计算 AF 的长.

7. $2\sqrt{5}-2$ 【解析】如图，过点 A 作 x 轴的平行线交 y 轴于点 M，过点 B 作 y 轴的平行线交直线 MA 于点 N，则 $\angle AMO=\angle ANB=90°$. ∵ $\angle MOA+$



$\angle MAO=90°$，$\angle NAB+\angle MAO=90°$，$\therefore\ \angle MOA=\angle NAB$. $\because\ \angle AMO=\angle ANB=90°$，$AO=AB$，$\therefore\ \triangle AMO\cong\triangle BNA(\mathrm{AAS})$，$\therefore\ AM=NB=m$，$MO=AN=2$，$\therefore\ B(m+2,2-m)$. $\because$ 点 A，B 都在反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(x>0)$ 的图象上，$\therefore\ 2m=(m+2)(2-m)$，解得 $m_1=-1+\sqrt{5}$，$m_2=-1-\sqrt{5}$（舍去），$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-1+\sqrt{5},2)$，$\therefore\ k=2(\sqrt{5}-1)=2\sqrt{5}-2$.

8. $\dfrac{2m-n}{2n-m}$　【解析】如图，作 $\angle BAM=\angle CDN=30°$，分别交 CB 的延长线于点 M，交 BC 的延长线于点 N.



$\because\ \angle ABC=\angle DCB=90°$，

$\therefore\ \angle ABM=\angle DCN=90°$，

$\therefore\ \angle M=90°-\angle BAM=60°$，$\angle N=90°-\angle CDN=60°$，

$\therefore\ \angle MAE+\angle AEM=180°-\angle M=120°$.

$\because\ \triangle AED$ 是等边三角形，

$\therefore\ \angle AED=60°$，$AE=DE$，

$\therefore\ \angle AEM+\angle DEN=180°-\angle AED=120°$，

$\therefore\ \angle MAE=\angle DEN$.

$\because\ \angle M=\angle N=60°$，

$\therefore\ \triangle AME\cong\triangle END(\mathrm{AAS})$，$\therefore\ AM=EN$，$ME=DN$.

$\because\ \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{n}{m}$，

$\therefore$ 设 $AB=kn$，$CD=km$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AMB$ 中，$BM=\dfrac{AB}{\tan 60°}=\dfrac{kn}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}kn$，$AM=\dfrac{AB}{\sin 60°}=\dfrac{kn}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}kn$，

$\therefore\ EN=AM=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}kn$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DCN$ 中，$CN=\dfrac{CD}{\tan 60°}=\dfrac{km}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}km$，$DN=\dfrac{DC}{\sin 60°}=\dfrac{km}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}km$，

$\therefore\ ME=DN=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}km$，

$\therefore\ CE=EN-CN=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}kn-\dfrac{\sqrt{3}}{3}km$，$BE=EM-BM=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}km-\dfrac{\sqrt{3}}{3}kn$，

$\therefore\ \dfrac{BE}{CE}=\dfrac{\frac{2}{3}\sqrt{3}km-\frac{\sqrt{3}}{3}kn}{\frac{2}{3}\sqrt{3}kn-\frac{\sqrt{3}}{3}km}=\dfrac{2m-n}{2n-m}$.

9.（1）【证明】$\because\ BD\perp$ 直线 m，$CE\perp$ 直线 m，

$\therefore\ \angle BDA=\angle CEA=90°$.

$\because\ \angle BAC=90°$，$\therefore\ \angle BAD+\angle CAE=90°$.

$\because\ \angle BAD+\angle ABD=90°$，$\therefore\ \angle CAE=\angle ABD$.

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE,\\ \angle BDA=\angle AEC,\\ AB=AC,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ADB\cong\triangle CEA(\mathrm{AAS})$，$\therefore\ AE=BD$，$AD=CE$，

$\therefore\ DE=AE+AD=BD+CE$.

【解】（2）成立，证明：$\because\ \angle BDA=\angle BAC=\alpha$，

$\therefore\ \angle DBA+\angle BAD=\angle BAD+\angle CAE=180°-\alpha$，

$\therefore\ \angle CAE=\angle ABD$.

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中，$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE,\\ \angle BDA=\angle CEA,\\ AB=AC,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ADB\cong\triangle CEA(\mathrm{AAS})$，$\therefore\ AE=BD$，$AD=CE$，

$\therefore\ DE=AE+AD=BD+CE$.

（3）$\triangle DEF$ 为等边三角形，理由如下：

由（2）知 $BD=AE$，$\angle DBA=\angle CAE$.

$\because\ \triangle ACF$ 为等边三角形，

$\therefore\ \angle CAF=60°$，$AF=AC$.

又 $\because\ AB=AC$，$\therefore\ AB=AF$.

$\because\ \angle BAC=120°$，$\therefore\ \angle BAF=60°$，

$\therefore\ \triangle ABF$ 是等边三角形，

$\therefore\ \angle ABF=\angle AFB=60°$，$BF=AF$，

$\therefore\ \angle DBA+\angle ABF=\angle CAE+\angle CAF$，

$\therefore\ \angle DBF=\angle EAF$.

$\because\ BF=AF$，$\therefore\ \triangle BDF\cong\triangle AEF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore\ DF=EF$，$\angle BFD=\angle AFE$，

$\therefore\ \angle DFE=\angle DFA+\angle AFE=\angle DFA+\angle BFD=60°$，$\therefore\ \triangle DEF$ 为等边三角形.

10.【解】（1）如图（1），过点 C 作 $CQ\perp x$ 轴于点 Q，

$\therefore \angle AQC=90°$.

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AC=AB$，$\angle CAB=90°$.

易得 $\angle ACQ=\angle BAO$.

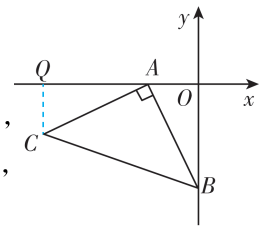
又$\because \angle AQC=\angle AOB=90°$，

$\therefore \triangle AQC\cong\triangle BOA$（AAS），

$\therefore CQ=AO$，$AQ=BO$.

$\because OA=2$，$OB=4$，

$\therefore CQ=2$，$AQ=4$，$\therefore OQ=6$，$\therefore C(-6,-2)$.



图（1）

（2）整式 $4m+4n-9\sqrt{3}$ 的值不发生变化.

如图（2），过点 D 作 $DP\perp OB$ 于点 P，

$\therefore \angle BPD=90°$，

$\therefore \angle PBD+\angle BDP=90°$.

$\because \triangle ABD$ 为等腰直角三角形，

$\therefore AB=BD$，$\angle ABD=\angle ABO+\angle OBD=90°$，

$\therefore \angle ABO=\angle BDP$.

又$\because \angle AOB=\angle BPD=90°$，

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle BPD$（AAS），$\therefore AO=BP$.

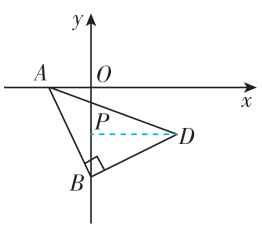
$\because BP=OB-PO=m-(-n)=m+n$.

$\because$ 点 $A(-2\sqrt{3},0)$，

$\therefore OA=2\sqrt{3}$，$\therefore m+n=2\sqrt{3}$，

$\therefore 4m+4n-9\sqrt{3}=4\times2\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-\sqrt{3}$，

$\therefore$ 整式 $4m+4n-9\sqrt{3}$ 的值不变，为 $-\sqrt{3}$.



图（2）

（3）$AM=2a+b$.

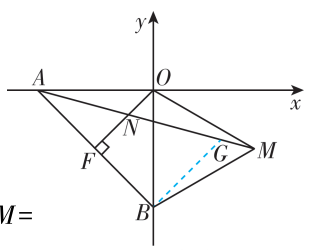
如图（3），在 MA 上截取 $MG=ON$，连接 BG.

$\because OA=OB$，$\angle AOB=90°$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=45°$.

$\because \triangle OBM$ 是等边三角形，

$\therefore BO=BM=MO$，$\angle OBM=\angle OMB=\angle BOM=60°$，



图（3）

$\therefore \angle ABM=105°$，$\angle AOM=150°$.

$\because OA=OB$，$\therefore OA=OM=BM$，

$\therefore \angle OAN=\angle AMO=15°$，$\therefore \angle BAM=30°$，

$\angle BMA=45°$.

$\because OF\perp AB$，$\therefore$ 易得 $\angle AOF=45°$，

$\therefore \angle AOF=\angle BMA$，$\therefore \triangle ANO\cong\triangle BGM$（SAS），

$\therefore BG=AN$，$\angle GBM=\angle OAN=15°$，

$\therefore \angle ABG=90°$，$\therefore 2BG=AG$，$\therefore 2AN=AG$.

$\because AG=AM-GM$，$\therefore 2AN+ON=AM$，

即 $AM=2a+b$.

模型 10　手拉手模型

1. C　【解析】$\because \triangle ABD$，$\triangle AEC$ 都是等边三角形，$\therefore AD=AB$，$AE=AC$，$\angle DAB=\angle CAE=60°$，$\angle ADB=\angle DBA=60°$，$\therefore \angle DAB+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$，$\therefore \angle DAC=\angle BAE$，$\therefore \triangle DAC\cong\triangle BAE$（SAS），$\therefore \angle ADC=\angle ABE$，$\therefore \angle BOC=\angle BDO+\angle DBA+\angle ABE=\angle BDO+\angle DBA+\angle ADC=\angle ADB+\angle DBA=60°+60°=120°$，$\therefore \angle BOC$ 的度数是 120°. 故选 C.

关键点拨

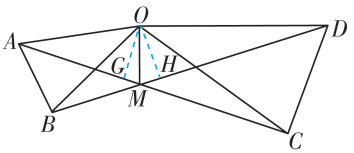
$\triangle ABD$ 和 $\triangle AEC$ 是等边三角形，且共顶点，符合手拉手模型的条件，易证 $\triangle DAC\cong\triangle BAE$（SAS），根据全等的性质求 $\angle BOC$ 的度数.

2. D　【解析】$\because \angle AOB=60°$，$OA=OB$，$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，$\therefore OA=AB=OB$，$\angle AOB=\angle OAB=\angle OBA=60°$. $\because \triangle ACD$ 是等边三角形，$\therefore AC=AD$，$\angle CAD=60°=\angle OAB$，$\therefore \angle OAC=\angle BAD$. 又$\because OA=AB$，$\therefore \triangle AOC\cong\triangle ABD$（SAS），$\therefore OC=BD$，$\angle AOB=\angle ABD=60°$，$\therefore \angle OBD=120°$，$\angle ABD=\angle OAB$，$\therefore OA/\!/BD$，故选项 A、B 不符合题意. $\because OC=BD$，$\therefore OB=BC+OC=BC+DB$. $\because OB=AB$，$\therefore CB+BD=AB$，故选项 C 不符合题意. 若 AB 平分 $\angle CAD$，则 $\angle OAC=\angle CAB=\angle BAD=30°$，$\therefore C$ 为 OB 的中点. $\because$ 点 C 是 OB 上的动点，$\therefore AB$ 平分 $\angle CAD$ 不一定成立，故选项 D 符合题意. 故选 D.

3. D　【解析】$\because \angle AOB=\angle COD=36°$，$\therefore \angle AOC=\angle BOD$. 在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中，$\begin{cases}OA=OB,\\ \angle AOC=\angle BOD,\\ OC=OD,\end{cases}$

$\therefore \triangle AOC\cong\triangle BOD$（SAS），$\therefore AC=BD$，$\angle OAC=\angle OBD$，故 A 选项不符合题意. $\because \angle OAB+\angle ABO=180°-36°=144°$，$\therefore \angle MAB+\angle ABM=144°$，$\therefore \angle AMB=180°-144°=36°$，故 B 选项不符合题意. 过点 O 作 $OG\perp AC$ 于点 G，过点 O 作

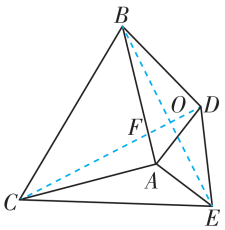
$OH \perp BD$ 于点 H，如图所示. $\because \triangle AOC \cong \triangle BOD$，$\therefore S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}$，即 $\frac{1}{2}AC \cdot OG=\frac{1}{2}BD \cdot OH$. $\because AC=BD$，$\therefore OH=OG$. 在 Rt$\triangle OGM$ 和 Rt$\triangle OHM$ 中，$\begin{cases}OG=OH,\\OM=OM,\end{cases}$ $\therefore$ Rt$\triangle OGM \cong$ Rt$\triangle OHM$（HL），$\therefore \angle OMG=\angle OMH$，即 MO 平分 $\angle AMD$，故 C 选项不符合题意. 假设 OM 平分 $\angle AOD$，则 $\angle AOM=\angle DOM$. 又 $\because OM=OM$，$\therefore \triangle AMO \cong \triangle DMO$（ASA），$\therefore AO=DO$. $\because OD=OC$，$AO<OC$，$\therefore AO<DO$，$\therefore$ 假设不成立，$\therefore OM$ 不平分 $\angle AOD$，故 D 选项符合题意，故选 D.



关键点拨

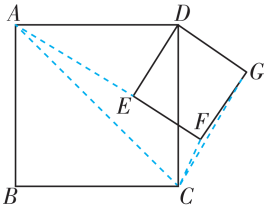
$OA=OB$，$OC=OD$，$\angle AOB=\angle COD$，符合手拉手模型的条件，则可证 $\triangle AOC \cong \triangle BOD$（SAS），根据全等的性质判断各结论.

4. D 【解析】连接 BE，CD，交点为 O，CD 交 AB 于 F，如图所示. $\because \angle BAC=\angle DAE=90°$，$\therefore \angle BAC+\angle BAD=\angle DAE+\angle BAD$，即 $\angle CAD=\angle BAE$. 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle BAE$ 中，$\begin{cases}AC=AB,\\\angle CAD=\angle BAE,\\AD=AE,\end{cases}$



$\therefore \triangle CAD \cong \triangle BAE$（SAS），$\therefore \angle ACF=\angle OBF$. $\because \angle BFC=\angle BAC+\angle ACF=\angle BOF+\angle OBF$，$\therefore \angle BOF=\angle BAC=90°$，$\therefore \angle BOC=\angle BOD=\angle COE=\angle DOE=90°$，$\therefore BD^2=OB^2+OD^2$，$CE^2=OC^2+OE^2$，$BC^2=OB^2+OC^2$，$DE^2=OD^2+OE^2$. 在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle DAE$ 中，由勾股定理得 $BC^2=AB^2+AC^2=2^2+2^2=8$，$DE^2=AD^2+AE^2=1^2+1^2=2$，$\therefore BD^2+CE^2=OB^2+OD^2+OC^2+OE^2=OB^2+OC^2+OD^2+OE^2=BC^2+DE^2=8+2=10$. 故选 D.

5. C 【解析】如图，连接 AE，CF，CG. $\because$ 四边形 $DEFG$ 是正方形，$\therefore \angle EDG=90°$，$EF=DE=DG$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AD=CD$，$\angle ADC=90°$，$\therefore \angle ADE=\angle CDG$，$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG$（SAS），$\therefore AE=CG$，$\therefore d_1+d_2+d_3=EF+CF+AE$. 易知点 A，E，F，C 在同一条直线上时，$EF+CF+AE$ 最小，即 $d_1+d_2+d_3$ 的值最小. 连接 AC，则 $d_1+d_2+d_3$ 的最小值为 AC 的长度. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，$\therefore d_1+d_2+d_3$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，故选 C.



6. ①③④ 【解析】$\because \triangle BAC$，$\triangle DEB$ 和 $\triangle AEF$ 都是等腰直角三角形，$\angle DEB=\angle AEF=\angle BAC=90°$，$\therefore AB=AC$，$\angle ABC=45°=\angle DBE$，$AE=EF$，$DE=BE$. $\because \angle DBA=\angle DBE-\angle ABE$，$\angle EBC=\angle ABC-\angle ABE$，$\angle AEB=\angle AED+\angle DEB$，$\angle FED=\angle AEF+\angle AED$，$\therefore \angle DBA=\angle EBC$，$\angle AEB=\angle FED$，故①正确. $\therefore \triangle AEB \cong \triangle FED$，$\therefore AB=DF=AC$，$\angle ABE=\angle FDE$，$\angle BAE=\angle DFE$，故③正确. $\because \angle ABE+\angle BHE=90°$，$\angle EFD+\angle EGF=90°$，$\angle BAE+\angle EAC=90°$，$BE>AE$，$\therefore \angle EGF=\angle EAC$，$\therefore \angle BHE \neq \angle EGF$，故②错误. $\because \angle EGF=\angle EAC$，$\therefore DF \parallel AC$. $\because DF=AC$，$\therefore$ 四边形 $ADFC$ 是平行四边形，$\therefore AD=CF$，故④正确. 故答案为①③④.

7. 【解】(1) ①$CE+CD=CA$. 理由如下：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，$\therefore AB=AC=BC$，$AD=AE=DE$，$\angle BAC=\angle DAE=60°$，$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，$\therefore \angle BAD=\angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\\angle BAD=\angle CAE,\\AD=AE,\end{cases}$

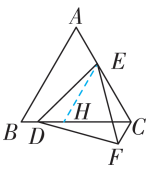
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$（SAS），$\therefore CE=BD$.

$\because BD+CD=BC$，$\therefore CE+CD=CA$.

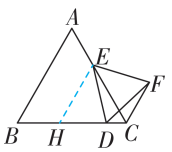
②$CA+CD=CE$. 理由如下：$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，$\therefore AB=AC=BC$，$AD=AE=DE$，$\angle BAC=\angle DAE=60°$，$\therefore \angle BAC+\angle DAC=\angle DAE+\angle DAC$，$\therefore \angle BAD=\angle CAE$. 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\\angle BAD=\angle CAE,\\AD=AE,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$（SAS），$\therefore CE=BD$. $\because CB+CD=BD$，$\therefore CA+CD=CE$.

(3)$6-\sqrt{3}$或$6+2\sqrt{3}$. 过E作$EH//AB$,则$\triangle EHC$为等边三角形.

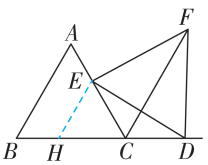
①当点D在H左侧时,如图(1). $\because ED=EF$, $\angle DEH=\angle FEC$, $EH=EC$, $\therefore \triangle EDH\cong\triangle EFC$(SAS), $\therefore \angle ECF=\angle EHD=120°$,此时$\triangle CEF$不可能为直角三角形.



图(1)



图(2)



图(3)

②当点D在H右侧,且在线段CH上时,如图(2). 同理可得$\triangle EDH\cong\triangle EFC$(SAS),

$\therefore \angle FCE=\angle EHD=60°$, $\angle FEC=\angle DEH<\angle HEC=60°$. 此时只有$\angle EFC$有可能为90°.

当$\angle EFC=90°$时, $\angle EDH=90°$, $\therefore ED\perp CH$.

$\because CH=CE=2\sqrt{3}$, $\therefore CD=\frac{1}{2}CH=\sqrt{3}$, $\therefore BD=6-\sqrt{3}$.

③当点D在H右侧,且在HC延长线上时,如图(3). 此时只有$\angle CEF$有可能为90°.

$\because \angle DEF=60°$, $\therefore \angle CED=30°$.

$\because \angle ECH=60°$, $\therefore \angle EDC=\angle CED=30°$,

$\therefore CD=CE=2\sqrt{3}$, $\therefore BD=6+2\sqrt{3}$.

综上,BD的长为$6-\sqrt{3}$或$6+2\sqrt{3}$.

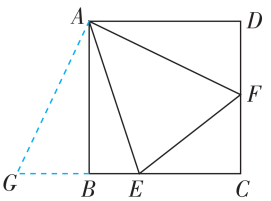
8. 【解】(1) $\because AB=AC$, $AE=AF$, $\angle BAC=\angle EAF=30°$, $\therefore \angle BAE=\angle CAF$, $\therefore \triangle ABE\cong\triangle ACF$(SAS), $\therefore BE=CF$, $\angle ABE=\angle ACD$. $\because \angle ABE+\angle BAC=\angle ACD+\angle BDC$, $\therefore \angle BDC=\angle BAC=30°$. 故答案为$BE=CF$,30.

(2) $BE=CF$, $\angle BDC=60°$,理由如下:$\because \angle BAC=\angle EAF=120°$, $\therefore \angle BAC-\angle EAC=\angle EAF-\angle EAC$,即$\angle BAE=\angle CAF$. 又$\because AB=AC$, $AE=AF$, $\therefore \triangle BAE\cong\triangle CAF$(SAS), $\therefore BE=CF$, $\angle AEB=\angle AFC$. $\because \angle EAF=120°$, $AE=AF$, $\therefore \angle AEF=\angle AFE=30°$, $\therefore \angle BDC=\angle BEF-\angle EFD=\angle AEB+30°-(\angle AFC-30°)=60°$.

(3) $\because \triangle ABC$和$\triangle AEF$都是等腰三角形, $\angle CAB=\angle EAF=90°$, $\therefore AB=AC$, $AE=AF$, $\therefore \angle CAB-\angle CAE=\angle FAE-\angle CAE$,即$\angle BAE=\angle CAF$, $\therefore \triangle BAE\cong\triangle CAF$(SAS), $\therefore BE=CF$. $\because AM\perp BF$, $AE=AF$, $\angle EAF=90°$, $\therefore EF=2AM$. $\because BF=BE+EF$, $\therefore BF=CF+2AM$. 故答案为$BF=CF+2AM$.

模型11　半角模型

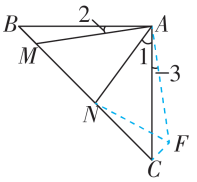
1. A　【解析】在正方形$ABCD$中, $AD=AB$, $\angle BAD=\angle ABC=\angle ADC=90°$,将$\triangle ADF$绕点$A$顺时针旋转90°,得$\triangle ABG$,如图所示.



易知G, B, E共线, $AF=AG$, $\angle DAF=\angle BAG$. $\because \angle EAF=45°$, $\therefore \angle BAE+\angle DAF=45°$, $\therefore \angle BAE+\angle BAG=45°$, $\therefore \angle GAE=\angle FAE=45°$. 在$\triangle GAE$和$\triangle FAE$中, $\begin{cases}AG=AF,\\ \angle GAE=\angle FAE,\\ AE=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle GAE\cong\triangle FAE$(SAS), $\therefore \angle AEF=\angle AEG$. $\because \angle BAE=\alpha$, $\therefore \angle AEB=90°-\alpha$, $\therefore \angle AEF=\angle AEB=90°-\alpha$, $\therefore \angle FEC=180°-\angle AEF-\angle AEB=180°-2\times(90°-\alpha)=2\alpha$,故选A.

2. $\sqrt{10}$　【解析】如图,将$\triangle AMB$逆时针旋转90°得到$\triangle AFC$,连接NF, $\therefore CF=BM$, $AF=AM$, $\angle B=\angle ACF$,

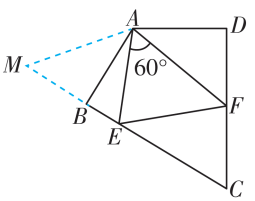


$\angle 2=\angle 3$. $\because \triangle ABC$是等腰直角三角形, $AB=AC$, $\angle BAC=90°$, $\therefore \angle B=\angle ACB=45°$. $\because \angle MAN=45°$, $\therefore \angle NAF=\angle 1+\angle 3=\angle 1+\angle 2=90°-45°=45°$. 在$\triangle MAN$和$\triangle FAN$中,

$\begin{cases}AN=AN,\\ \angle MAN=\angle FAN,\\ AM=AF,\end{cases}$ $\therefore \triangle MAN\cong\triangle FAN$(SAS),

$\therefore MN=NF$. $\because \angle ACF=\angle B=45°$, $\angle ACB=45°$, $\therefore \angle FCN=90°$. $\because CF=BM=1$, $CN=3$, $\therefore$在Rt$\triangle CFN$中,由勾股定理得$MN=NF=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,故答案为$\sqrt{10}$.

3. 【证明】如图,将$\triangle ADF$绕点A顺时针旋转120°得到$\triangle ABM$, $\therefore \angle ABM=\angle D=90°$, $\angle MAB=\angle FAD$, $AM=AF$, $MB=DF$, $\therefore \angle MBE=\angle ABM+\angle ABE=180°$, $\angle MAE=\angle MAB+\angle BAE=\angle FAD+\angle BAE=\angle BAD-\angle EAF=60°$,



$\therefore M,B,E$ 三点共线，$\angle MAE=\angle FAE$.

$\because AE=AE,AM=AF$，

$\therefore \triangle MAE\cong\triangle FAE(\mathrm{SAS})$，

$\therefore ME=EF,\therefore EF=ME=MB+BE=DF+BE$.

关键点拨

$\angle BAD=120°,\angle EAF=60°$，符合半角模型，通过旋转证明三角形全等，将线段等量代换得出结论.

4.【解】(1)$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD,\angle B=\angle D=90°$.

在$\triangle ABM$ 与$\triangle ADN$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle B=\angle D,\\ BM=DN,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle ADN,\therefore \angle BAM=\angle DAN,AM=AN$.

$\because AH\perp MN,\therefore \angle MAH=\dfrac{1}{2}MAN=22.5°$.

$\because \angle BAM+\angle DAN=90°-\angle MAN=45°$，

$\therefore \angle BAM=22.5°$.

在$\triangle ABM$ 与$\triangle AHM$ 中，$\begin{cases}\angle BAM=\angle HAM,\\ \angle B=\angle AHM=90°,\\ AM=AM,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle AHM,\therefore AB=AH$.

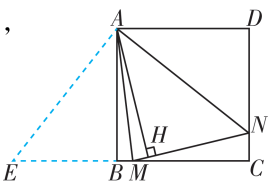
故答案为 $AH=AB$.

(2) 成立. 证明：如图(1)，延长 CB 至 E，使 $BE=DN$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD,\angle D=\angle ABC=\angle ABE=90°$.

在$\triangle AEB$ 和$\triangle AND$ 中，



图(1)

$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABE=\angle ADN,\\ BE=DN,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle AND$，

$\therefore AE=AN,\angle EAB=\angle NAD$，

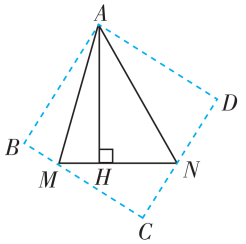
$\therefore \angle EAM=\angle EAB+\angle BAM=\angle NAD+\angle BAM=90°-\angle NAM=45°=\angle NAM$.

在$\triangle AEM$ 和$\triangle ANM$ 中，$\begin{cases}AE=AN,\\ \angle EAM=\angle NAM,\\ AM=AM,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEM\cong\triangle ANM,\therefore S_{\triangle AEM}=S_{\triangle ANM},EM=MN$.

$\because AB,AH$ 分别是$\triangle AEM$ 和$\triangle ANM$ 对应边上的高，$\therefore AB=AH$.

(3)如图(2)，分别沿 AM,AN 翻折$\triangle AMH$ 和$\triangle ANH$，得到$\triangle AMB$ 和$\triangle AND$，



图(2)

则 $AB=AH=AD,BM=MH=2,DN=NH=3,\angle B=\angle D=90°,\angle BAM=\angle MAH,\angle HAN=\angle NAD$，

则 $\angle BAD=2\angle MAN=90°$.

延长 BM 和 DN 交于点 C，得正方形 $ABCD$.

则 $AH=AB=BC=CD=AD$.

设 $AH=x$，则 $MC=x-2,NC=x-3$.

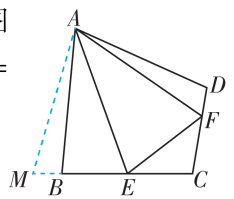
在 Rt$\triangle MCN$ 中，由勾股定理，得 $MN^2=MC^2+NC^2$，

$\therefore 5^2=(x-2)^2+(x-3)^2$，

解得 $x_1=6,x_2=-1$(不符合题意，舍去)，

$\therefore AH=6$.

5.【阅读材料】【证明】如图(1)，延长 CB 至 M，使 $BM=DF$，连接 AM.



图(1)

$\because \angle ABC+\angle D=180°$，

$\angle ABC+\angle ABM=180°$，

$\therefore \angle D=\angle ABM$.

在$\triangle ABM$ 和$\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABM=\angle D,\\ BM=DF,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle ADF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore AF=AM,\angle DAF=\angle BAM$.

$\because \angle BAD=2\angle EAF$，

$\therefore \angle DAF+\angle BAE=\angle EAF$，

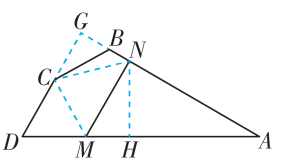
$\therefore \angle EAB+\angle BAM=\angle EAM=\angle EAF$.

在$\triangle FAE$ 和$\triangle MAE$ 中，$\begin{cases}AF=AM,\\ \angle EAF=\angle EAM,\\ AE=AE,\end{cases}$

$\therefore \triangle FAE\cong\triangle MAE(\mathrm{SAS})$，

$\therefore EF=EM=BE+BM=BE+DF$，即 $EF=BE+DF$.

【解决问题】【解】如图(2)，延长 DC,AB 交于点 G，过点 N 作 $NH\perp AD$ 于 H，连接 CN,CM.



图(2)

$\because \angle D=60°,\angle ABC=120°$，

$\angle BCD=150°$,

$\therefore \angle A=360°-60°-120°-150°=30°$,

$\therefore \angle G=90°$,$\therefore AD=2DG$.

在 Rt△CGB 中,$\angle BCG=180°-150°=30°$,

$\therefore BG=\frac{1}{2}BC=50$,$CG=50\sqrt{3}$.

$\therefore DG=CD+CG=100+50\sqrt{3}$,

$\therefore AD=2DG=200+100\sqrt{3}$,$AG=\sqrt{3}DG=150+100\sqrt{3}$.

$\because DM=100$,

$\therefore AM=AD-DM=200+100\sqrt{3}-100=100+100\sqrt{3}$.

$\because BG=50$,$BN=50(\sqrt{3}-1)$,

$\therefore GN=BG+BN=50+50(\sqrt{3}-1)=50\sqrt{3}$,

$\therefore AN=AG-GN=150+100\sqrt{3}-50\sqrt{3}=150+50\sqrt{3}$,

△CGN 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle GCN=45°$,

$\therefore \angle BCN=45°-30°=15°$.

$\because CD=DM$,$\angle D=60°$,

$\therefore$ △DCM 是等边三角形,

$\therefore \angle DCM=60°$,

$\therefore \angle MCN=150°-60°-15°=75°=\frac{1}{2}\angle BCD$.

由【阅读材料】的结论得 $MN=DM+BN=100+50(\sqrt{3}-1)=50\sqrt{3}+50$.

$\therefore AM+AN-MN=100+100\sqrt{3}+150+50\sqrt{3}-(50\sqrt{3}+50)=200+100\sqrt{3}\approx370$(m).

故答案为 370.

6.【解】(1)$MN=BM+NC$,证明:

$\because DM=DN$,$\angle MDN=60°$,

$\therefore$ △MDN 是等边三角形,

$\therefore MN=DM=DN$.

$\because \angle BDC=120°$,$BD=DC$,

$\therefore \angle DBC=\angle DCB=30°$.

$\because$ △ABC 是等边三角形,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60°$,

$\therefore \angle DBM=\angle DCN=90°$.

$\because BD=CD$,$DM=DN$,

$\therefore$ Rt△DBM≌Rt△DCN,

$\therefore \angle BDM=\angle CDN=30°$,$BM=CN$.

$\therefore DM=2BM$,

$\therefore DM=MN=2BM=BM+NC$.

$\because AB=AC$,$BM=CN$,

$\therefore AM=AN$.

$\because \angle A=60°$,

$\therefore$ △AMN 是等边三角形,

$\therefore$ △AMN 的周长 $Q=3MN=6BM$,

等边△ABC 的周长 $L=3AB=3(AM+BM)=9BM$,

$\therefore \frac{Q}{L}=\frac{6BM}{9BM}=\frac{2}{3}$.

(2)结论 $MN=BM+CN$ 与$\frac{Q}{L}=\frac{2}{3}$均成立.

证明:如图(1),延长 AC 到 E,使 $CE=BM$,连接 DE.

$\because$ △ABC 是等边三角形,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60°$.

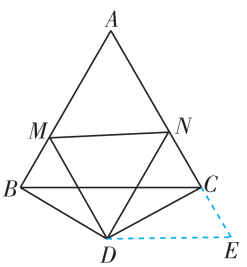
$\because BD=CD$,$\angle BDC=120°$,

$\therefore \angle DBC=\angle DCB=30°$,

$\therefore \angle ABC+\angle DBC=\angle ACB+\angle DCB=90°$,

即 $\angle ABD=\angle ACD=90°$,

$\therefore \angle DCE=180°-\angle ACD=180°-90°=90°$.



图(1)

在 Rt△DBM 和 Rt△DCE 中,

$$\begin{cases} BD=CD, \\ \angle ABD=\angle DCE=90°, \\ BM=CE, \end{cases}$$

$\therefore$ △DBM≌△DCE(SAS),

$\therefore DM=DE$,$\angle BDM=\angle CDE$.

$\because \angle BDC=120°$,$\angle MDN=60°$,

$\therefore \angle BDM+\angle CDN=120°-60°=60°$,

$\therefore \angle CDE+\angle CDN=60°$,即 $\angle NDE=60°$.

在△MDN 和△EDN 中,$\begin{cases} DM=DE, \\ \angle MDN=\angle EDN=60°, \\ DN=DN, \end{cases}$

$\therefore$ △MDN≌△EDN(SAS),

$\therefore MN=NE$.

$\because NE=CN+CE$,$CE=BM$,

$\therefore MN=BM+CN$.

$\because Q=AM+AN+MN=AM+AN+BM+CN=AB+AC=$

$2AB$，$L=AB+AC+BC=3AB$，

$\therefore \dfrac{Q}{L}=\dfrac{2}{3}$.

（3）∵ 等边$\triangle ABC$的周长为L，

$\therefore AB=\dfrac{L}{3}$.

在AC上截取$CF=BM$，连接DF，如图（2）.

∵ $\triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle ACB=\angle ABC=60°$.

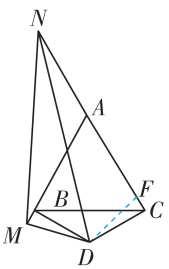
∵ $\angle BDC=120°$，$BD=DC$，

$\therefore \angle CBD=\angle BCD=30°$，

即$\angle ABD=\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle MBD=\angle FCD$.

又∵ $BM=CF$，$BD=DC$，



图（2）

$\therefore \triangle DBM\cong\triangle DCF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore DM=DF$，$\angle MDB=\angle FDC$，

$\therefore \angle MDB+\angle BDF=\angle FDC+\angle FDB$，

即$\angle BDC=\angle FDM$.

∵ $\angle BDC=120°$，$\therefore \angle MDF=120°$.

又∵ $\angle MDN=60°$，

$\therefore \angle FDN=\angle MDN=60°$.

∵ $DM=DF$，$DN=DN$，

$\therefore \triangle DMN\cong\triangle DFN(\mathrm{SAS})$，$\therefore MN=FN$.

$\therefore \triangle AMN$的周长$Q=MN+AN+AM=FN+AN+AB+BM=AN+AF+AN+AB+CF=2x+2AB=2x+\dfrac{2}{3}L$，

故答案为$2x+\dfrac{2}{3}L$.

专题四　相似三角形模型

模型 12　“A”字型

1. C　【解析】∵ 点D，E为边AB的三等分点，$\therefore AD=DE=EB$，$\therefore AB=3BE$，$AE=2AD$. ∵ $EF\parallel AC$，$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle BAC$，$\therefore EF:AC=BE:AB$. ∵ $AC=12$，$AB=3BE$，$\therefore EF:12=BE:3BE$，$\therefore EF=4$. ∵ $DG\parallel EF$，$\therefore \triangle ADH\backsim\triangle AEF$，$\therefore DH:EF=AD:AE$. ∵ $EF=4$，$AE=2AD$，$\therefore DH:4=AD:2AD$，$\therefore DH=2$. 故选 C.

2. B　【解析】∵ $MC\parallel AB$，$\therefore \triangle DCM\backsim\triangle DBA$，$\therefore \dfrac{DC}{DB}=\dfrac{MC}{AB}$，即$\dfrac{1.5}{AB}=\dfrac{1}{BC+1}$. ① ∵ $NE\parallel AB$，$\therefore \triangle FNE\backsim\triangle FAB$，$\therefore \dfrac{NE}{AB}=\dfrac{EF}{BF}$，即$\dfrac{1.5}{AB}=\dfrac{2}{BC+3+2}$，② $\therefore \dfrac{1}{BC+1}=\dfrac{2}{BC+3+2}$，解得$BC=3$，$\therefore \dfrac{1.5}{AB}=\dfrac{1}{3+1}$，解得$AB=6$，即路灯$A$的高度$AB$为6米. 故选 B.

思路分析

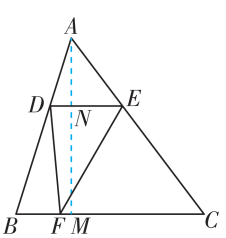
由$MC\parallel AB$（正“A”字型）可判断$\triangle DCM\backsim\triangle DBA$，根据相似三角形的性质得$\dfrac{1.5}{AB}=\dfrac{1}{BC+1}$，同理可得$\dfrac{1.5}{AB}=\dfrac{2}{BC+3+2}$，求出$BC$后即可得到$AB$的长.

3. A　【解析】∵ $\angle AED=\angle B$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$，$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{CB}$，$\therefore DE=\dfrac{AD\times BC}{AC}$. ∵ $AD=2$，$BC=5$，$AC=4$，$\therefore DE=\dfrac{2\times5}{4}=\dfrac{5}{2}$. 故选 A.

解题有法

$\angle A$为公共角，$\angle AED=\angle B$，符合歪“A”字型相似条件，则$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

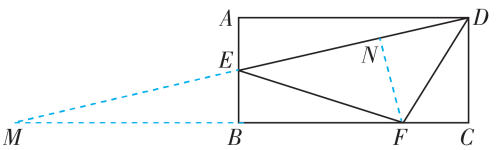
4. A　【解析】如图，过点A作$AM\perp BC$于M，交DE于点N. ∵ $DE\parallel BC$，$\therefore AN\perp DE$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AN}{AM}$. 设$AN=a$，则$\dfrac{DE}{8}=\dfrac{a}{6}$，$\therefore DE=\dfrac{4}{3}a$，$\therefore \triangle DEF$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times DE\times MN=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}a\cdot(6-a)=-\dfrac{2}{3}a^2+4a=-\dfrac{2}{3}(a-3)^2+6$，$\therefore$当$a=3$时，$S$有最大值，最大值为6. 故选 A.



思路分析

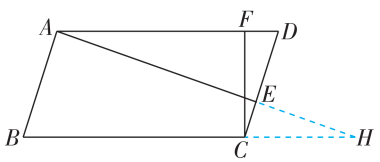
过点 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，交 DE 于 N. 由 $DE//BC$ 可判定 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$. 设 $AN=a$，根据相似三角形对应高的比等于相似比，得 $DE=\frac{4}{3}a$，进而可得 $\triangle DEF$ 的面积 S 与 a 的关系式，再根据二次函数的性质求最值即可.

5. A 【解析】过点 F 作 $FN\perp ED$，延长 DE，CB 交于点 M，如图，则 $\angle FNE=\angle FND=90°$.



$\because\angle FDE=45°$，$\therefore\triangle NFD$ 为等腰直角三角形，$\therefore FN=DN$. 设 $NF=x$，则 $DN=x$. 在 Rt $\triangle FNE$ 中，$\angle FEN=30°$，$\therefore FE=2NF=2x$，$\therefore EN=\sqrt{EF^2-FN^2}=\sqrt{3}x$，$\therefore DE=(\sqrt{3}+1)x$. $\because BE=3$，$AB=CD=6$，$\therefore AE=BE=3$. 又$\because\angle AED=\angle BEM$，$\angle A=\angle EBM=90°$，$\therefore\triangle AED\cong\triangle BEM$(ASA)，$\therefore AD=BM$，$ME=DE=(\sqrt{3}+1)x$，$\therefore MN=(2\sqrt{3}+1)x$. $\because\angle M=\angle M$，$\angle ABM=\angle FNM=90°$，$\therefore\triangle MBE\backsim\triangle MNF$，$\therefore\frac{BM}{MN}=\frac{BE}{FN}$，即 $\frac{BM}{(2\sqrt{3}+1)x}=\frac{3}{x}$，解得 $BM=6\sqrt{3}+3$，$\therefore BC=AD=BM=6\sqrt{3}+3$. 故选 A.

6. $\frac{2}{3}$ 【解析】如图，延长 BC 至 H，使 $CH=CD$，连接 EH. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD=BC=4$，$AB=CD=2$，$AD//BH$，$\therefore\angle D=\angle DCH$. 又$\because CD=CH$，$DF=CE$，$\therefore\triangle CDF\cong\triangle HCE$(SAS)，$\therefore CF=EH$，$\therefore AE+CF=AE+EH$，$\therefore$ 当 A，E，H 三点共线时，$AE+CF$ 有最小值. 此时，$\because CD//AB$，$\therefore$ 易得 $\triangle CEH\backsim\triangle BAH$，$\therefore\frac{CH}{BH}=\frac{CE}{AB}$，$\therefore\frac{2}{2+4}=\frac{CE}{2}$，$\therefore CE=\frac{2}{3}$. 故答案为 $\frac{2}{3}$.



7. (1)【解】$\because PC=2PA$，$\therefore AC=3AP$.

$\because AB//CD$，$l//AB$，$\therefore CD//l$，

$\therefore\triangle APR\backsim\triangle ACD$，$\therefore\frac{AP}{AC}=\frac{PR}{CD}$，

$\therefore\frac{AP}{3AP}=\frac{PR}{4}$，

$\therefore PR=\frac{4}{3}$.

(2)【证明】$\because AB//CD$，$l//AB$，

$\therefore AB//l//CD$，$\therefore\frac{AP}{AC}=\frac{BS}{BD}$.

$\because l//CD$，

$\therefore\triangle BSQ\backsim\triangle BDC$，$\therefore\frac{BS}{BD}=\frac{SQ}{CD}$.

由(1)得 $\frac{AP}{AC}=\frac{PR}{CD}$，$\therefore\frac{SQ}{CD}=\frac{PR}{CD}$，

$\therefore PR=QS$.

思路分析

(1)由 $l//AB$，$AB//CD$，得 $CD//l$(正“A”字型)可判定 $\triangle APR\backsim\triangle ACD$，根据相似三角形的性质得 $\frac{AP}{3AP}=\frac{PR}{4}$，解之即可求得 PR 的值. (2)由 $AB//l//CD$ 可得 $\frac{AP}{AC}=\frac{BS}{BD}$，由 $l//CD$(正“A”字型)可判定 $\triangle BSQ\backsim\triangle BDC$，由相似三角形的性质可得 $\frac{BS}{BD}=\frac{SQ}{CD}$，结合(1)中 $\frac{AP}{AC}=\frac{PR}{CD}$，即可得证.

8. (1)【证明】$\because DE//BC$，

$\therefore\triangle AGD\backsim\triangle AFB$，$\triangle AFC\backsim\triangle AGE$，

$\therefore\frac{DG}{BF}=\frac{AG}{AF}$，$\frac{GE}{FC}=\frac{AG}{AF}$，

$\therefore\frac{DG}{BF}=\frac{GE}{FC}$.

$\because BF=CF$，$\therefore DG=EG$.

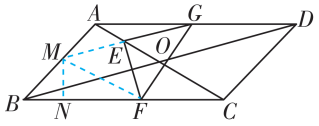
【解】(2)$\because DG=EG$，$CG\perp DE$，

$\therefore CE=CD=6$.

$\because DE//BC$，$\therefore\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}=\frac{3}{3+6}=\frac{1}{3}$.

（3）延长 GE 交 AB 于 M，连接 MF，过点 M 作 $MN\perp BC$ 于 N，如图.



∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $OB=OD$，$\angle ABC=\angle ADC=45°$.

∵ $MG/\!/BD$，∴ 易得 $ME=GE$.

∵ $EF\perp EG$，∴ $FM=FG=10$.

在 Rt△GEF 中，$\angle EGF=40°$，

∴ $\angle EFG=90°-40°=50°$.

∵ FG 平分 $\angle EFC$，

∴ $\angle GFC=\angle EFG=50°$.

∵ $FM=FG$，$EF\perp GM$，

∴ $\angle MFE=\angle EFG=50°$，

∴ $\angle MFN=30°$，

∴ $MN=\frac{1}{2}MF=5$，∴ $NF=\sqrt{MF^2-MN^2}=5\sqrt{3}$.

∵ $\angle ABC=45°$，∴ $BN=MN=5$，

∴ $BF=BN+NF=5+5\sqrt{3}$.

9.【问题探究】（1）**【解】**$\frac{AF}{AB}=\frac{1}{4}$.

如图（1），取 AB 的中点 G，连接 DG.

∵ 点 D 是 AC 的中点，

∴ DG 是△ABC 的中位线，

∴ $DG/\!/BC$.

∵ $AB=AC$，$\angle BAC=60°$，

∴ △ABC 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=60°$.

∵ 点 D 是 AC 的中点，∴ $\angle DBC=30°$.

∵ $BD=ED$，∴ $\angle E=\angle DBC=30°$，

∴ $\angle BFE=90°$，

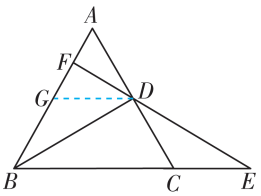
∴ $DF\perp AB$. ∵ $DG/\!/BC$，

∴ $\angle AGD=\angle ABC=60°$，$\angle ADG=\angle ACB=60°$，

∴ △ADG 是等边三角形，

∴ $AF=\frac{1}{2}AG$.

∵ $AG=\frac{1}{2}AB$，∴ $AF=\frac{1}{4}AB$，∴ $\frac{AF}{AB}=\frac{1}{4}$.



图（1）

（2）**【证明】**取 BC 的中点 H，连接 DH，如图（2）.

∵ 点 D 为 AC 的中点，

∴ $DH/\!/AB$，$DH=\frac{1}{2}AB$.

∵ $AB=AC$，∴ $DH=DC$，

∴ $\angle DHC=\angle DCH$.

∵ $BD=DE$，

∴ $\angle DBH=\angle DEC$，

∴ $\angle BDH=\angle EDC$，

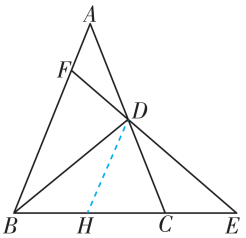
∴ △DBH≌△DEC（ASA），

∴ $BH=EC$. 又∵ H 为 BC 的中点，∴ $BH=HC$，

∴ $BH=HC=EC$，∴ $\frac{EB}{EH}=\frac{3}{2}$.

∵ $DH/\!/AB$，∴ △EDH∽△EFB，

∴ $\frac{FB}{DH}=\frac{EB}{EH}=\frac{3}{2}$，∴ $\frac{FB}{AB}=\frac{3}{4}$，∴ $\frac{AF}{AB}=\frac{1}{4}$.



图（2）

【问题拓展】【解】$\frac{AF}{AB}=\frac{2-n}{4}$.

如图（3），取 BC 的中点 H，连接 DH，

∴ $DH/\!/AB$，$DH=\frac{1}{2}AB$.

同（2）可证△DGH≌△DEC（ASA），

∴ $GH=CE$，∴ $HE=CG$.

∵ $\frac{CG}{BC}=\frac{1}{n}$，∴ $\frac{HE}{BC}=\frac{1}{n}$，

∴ $\frac{HE}{BH}=\frac{2}{n}$，∴ $\frac{HE}{BE}=\frac{2}{n+2}$.

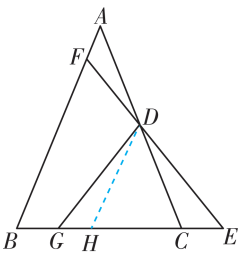
∵ $DH/\!/BF$，

∴ △EDH∽△EFB，

∴ $\frac{HE}{BE}=\frac{DH}{BF}=\frac{2}{n+2}$.

∵ $DH=\frac{1}{2}AB$，∴ $\frac{BF}{AB}=\frac{n+2}{4}$，

∴ $\frac{AF}{AB}=\frac{2-n}{4}$.



图（3）

模型 13　“8”字型

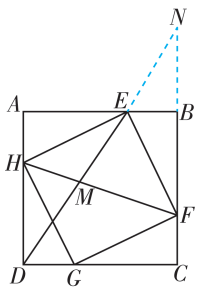
1. C　**【解析】**∵ DE 是△ABC 的中位线，∴ $DE/\!/BC$，$DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times6=3$，∴ △$DEF$∽△$BMF$，

$\therefore \frac{DE}{BM}=\frac{DF}{BF}=\frac{2BF}{BF}=2$，$\therefore BM=\frac{3}{2}$，$\therefore CM=BC+BM=\frac{15}{2}$. 故选 C.

2. D 【解析】连接 AD. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ADB=90°$. 又 $\because \angle C=\angle B$，$\angle DEC=\angle AEB$，$\therefore \triangle DEC\backsim\triangle AEB$，$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{AE}=\cos\angle AED$. 故选 D.

3. B 【解析】在正方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\therefore AB=AD=CD=6$. 在正方形 $CEFG$ 中，$CE=2$，$\therefore CE=GF=CG=2$，$\therefore DG=CD-CG=4$. 由题意得 $AD/\!/BE$，$GF/\!/BE$，$\therefore AD/\!/GF$，$\therefore \triangle ADH\backsim\triangle FGH$，$\therefore \frac{AD}{GF}=\frac{DH}{GH}$，即 $\frac{6}{2}=\frac{DH}{4-DH}$，解得 $DH=3$，故选 B.

4. C 【解析】如图所示，延长 CB，DE 交于点 N.



$\because \frac{AH}{AE}=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 可设 $AH=1$，$AE=2$. $\because$ 正方形 $ABCD$ 由四个全等的直角三角形拼接而成，$\therefore BE=1$，$DH=BF=2$，$\therefore AD=3$. $\because AD/\!/BN$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BNE$，$\therefore \frac{AD}{BN}=\frac{AE}{BE}$，即 $\frac{3}{BN}=\frac{2}{1}$，$\therefore BN=1.5$. $\because DH/\!/NF$，$\therefore \triangle DHM\backsim\triangle NFM$，$\therefore \frac{HM}{FM}=\frac{DH}{NF}=\frac{2}{1.5+2}=\frac{4}{7}$. 故选 C.

思路分析

添加辅助线，构造正“8”字型相似模型，证 $\triangle ADE\backsim\triangle BNE$，$\triangle DHM\backsim\triangle NFM$. 设 $AH=1$，$AE=2$，代入比例式计算.

5. $\sqrt{m^2+n^2}$ 【解析】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$.

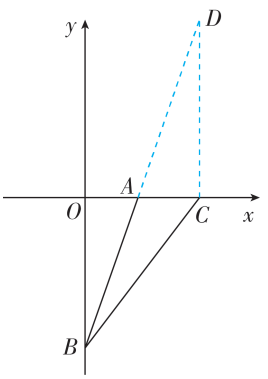
$\because$ 折叠 $\triangle BDE$ 得到 $\triangle FDE$，$\therefore \triangle BDE\cong\triangle FDE$，$\therefore S_{\triangle BDE}=S_{\triangle FDE}$，$\angle F=\angle B=\angle A=\angle C=60°$.

$\because DE$ 平分等边 $\triangle ABC$ 的面积，$\therefore S_{四边形ACED}=S_{\triangle BDE}=S_{\triangle FDE}$，$\therefore S_{\triangle FHG}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle CHE}$.

又 $\because \angle AGD=\angle FGH$，$\angle CHE=\angle FHG$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle FHG$，$\triangle CHE\backsim\triangle FHG$，$\therefore \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle FHG}}=\left(\frac{DG}{GH}\right)^2=\frac{m^2}{GH^2}$，$\frac{S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=\left(\frac{EH}{GH}\right)^2=\frac{n^2}{GH^2}$，$\therefore \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle FHG}}+\frac{S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=\frac{S_{\triangle ADG}+S_{\triangle CHE}}{S_{\triangle FHG}}=\frac{m^2+n^2}{GH^2}=1$，$\therefore GH^2=m^2+n^2$，$\therefore GH=\sqrt{m^2+n^2}$ 或 $GH=-\sqrt{m^2+n^2}$（不符合题意，舍去），故答案为 $\sqrt{m^2+n^2}$.

6. $\left(\frac{9}{4},0\right)$ 【解析】设 $C(a,0)$，$\therefore OC=a$. $\because$ 点 $A(1,0)$，点 $B(0,-3)$，$\therefore OA=1$，$AC=a-1$，$OB=3$，$BC=\sqrt{3^2+a^2}=\sqrt{a^2+9}$. 在 Rt $\triangle OAB$ 中，$\tan\angle OBA=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{3}$. $\because \tan\angle ABC=\frac{1}{3}$，$\therefore \angle OBA=\angle ABC$. 过 C 点作 $CD/\!/y$ 轴交 BA 的延长线于点 D，如图，$\therefore \angle OBA=\angle D$，$\angle AOB=\angle ACD$，$\therefore \triangle OBA\backsim\triangle CDA$，$\angle ABC=\angle D$，$\therefore \frac{OB}{CD}=\frac{OA}{CA}$，$CD=BC$，$\therefore \frac{OB}{BC}=\frac{OA}{AC}$，$\therefore \frac{3}{\sqrt{a^2+9}}=\frac{1}{a-1}$，解得 $a=0$（舍去）或 $a=\frac{9}{4}$，$\therefore C\left(\frac{9}{4},0\right)$.

故答案为 $\left(\frac{9}{4},0\right)$.



7. (1) 2 (2) $2+\sqrt{3}$ 【解析】(1) 如图(1)，延长 AF，交 DC 的延长线于点 T.

在正方形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BCD=90°$，$AB=CB$，$\therefore \angle FCT=90°$.

$\because AE=CF$，$AE=EB$，

$\therefore CF=AE=BE=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore BF=CF$.

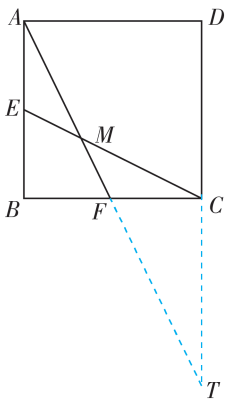
在$\triangle BAF$和$\triangle CTF$中,$\begin{cases}\angle ABF=\angle FCT,\\ BF=CF,\\ \angle AFB=CFT,\end{cases}$

$\therefore \triangle BAF\cong\triangle CTF(\mathrm{ASA})$,

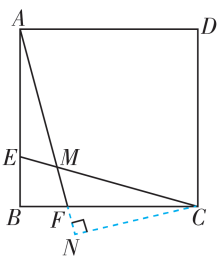
$\therefore AB=CT,\therefore CT=2AE$.

$\because AE/\!/CT,\therefore \triangle AEM\backsim\triangle TCM$,

$\therefore \frac{CM}{EM}=\frac{CT}{AE}=2$. 故答案为 2.



图(1)



图(2)

(2)过点 C 作 $CN\perp AF$,交 AF 的延长线于点 N,如图(2). 在 $\mathrm{Rt}\triangle CMN$ 中,$\angle CMF=60°$,

$\therefore \sin\angle CMF=\frac{CN}{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\angle CMF=\frac{MN}{CM}=\frac{1}{2}$,

$\therefore CM=2MN$.

$\because AB=BC,AE=CF,\therefore BE=BF$.

又$\because \angle B=\angle B$,

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle CBE(\mathrm{SAS})$,

$\therefore \angle FAB=\angle ECB$.

$\because \angle AME=\angle CMF,AE=CF$,

$\therefore \triangle AME\cong\triangle CMF(\mathrm{AAS}),\therefore EM=FM$.

$\because \angle AFB=\angle CFN,\angle B=\angle N=90°$,

$\therefore \angle FAB=\angle FCN$,

$\therefore \angle MCF=\angle NCF$. 设$\triangle CFM$中 CM 边上的高为 h,则 $FN=h,S_{\triangle CMF}=\frac{1}{2}CM\cdot h=\frac{1}{2}MF\cdot CN$,

$\therefore \frac{CN}{CM}=\frac{FN}{MF}$. $\because \frac{CN}{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \frac{FN}{FM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because \frac{CM}{EM}=\frac{2MN}{EM}=\frac{2(MF+FN)}{EM},MF=EM$,

$\therefore \frac{CM}{EM}=\frac{2(EM+FN)}{EM}=\frac{2EM+2FN}{EM}=2+2\times\frac{FN}{FM}=2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$.

思路分析

(1)添加辅助线,构造正"8"字型相似模型,则$\triangle MCT\backsim\triangle MEA$;(2)添加辅助线,证$\triangle ABF\cong\triangle CBE$和$\triangle AME\cong\triangle CMF$,利用特殊角三角函数值将线段等量代换进行计算.

8. (1)【证明】$\because AD/\!/BC,\therefore \triangle EAD\backsim\triangle ECB$,

$\therefore \frac{EA}{EC}=\frac{ED}{EB},\therefore \frac{EA}{ED}=\frac{EC}{EB}$.

$\because \angle BDF=\angle BAC,\angle AEB=\angle DEF$,

$\therefore \triangle EAB\backsim\triangle EDF,\therefore \frac{EB}{EF}=\frac{EA}{ED},\therefore \frac{EB}{EF}=\frac{EC}{EB}$,

$\therefore EB^2=EF\cdot EC$.

(2)【解】在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=90°,BC=6$,

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{3},BC=2AD$,

$\therefore AC=9,AD=3$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{9^2-6^2}=3\sqrt{5}$.

$\because \angle ABC=90°,AD/\!/BC,\therefore \angle BAD=90°$,

$\therefore BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{5})^2}=3\sqrt{6}$.

$\because \triangle EAD\backsim\triangle ECB,\therefore \frac{EA}{EC}=\frac{ED}{EB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$,

$\therefore EC=2EA,EB=2ED$,

$\therefore EC=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\times9=6,EB=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}\times3\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

$\because EB^2=EF\cdot EC,\therefore (2\sqrt{6})^2=6EF,\therefore EF=4$,

$\therefore FC=EC-EF=6-4=2$.

9.【解】(1)$\because BD:BC=3:4$,

$\therefore$ 设 $BD=3x$,则 $BC=4x$.

$\because BE$ 是 AC 边上的中线,$\therefore AE=CE$.

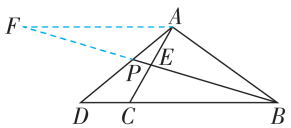
$\because AF/\!/BC,\therefore \triangle AFE\backsim\triangle CBE$,

$\therefore \frac{AF}{BC}=\frac{AE}{CE}=1,\therefore AF=BC=4x$.

$\because AF/\!/BC,\therefore \triangle AFP\backsim\triangle DBP,\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{AF}{BD}=$

$\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}$.

(2)如图(1),过点 A 作 $AF//BC$,交 BE 的延长线于点 F.



图(1)

$\because CD:BC=1:3$,

$\therefore$ 设 $CD=y$,则 $BC=3y$,$BD=4y$.

$\because BE$ 是 AC 边上的中线,$\therefore AE=CE$.

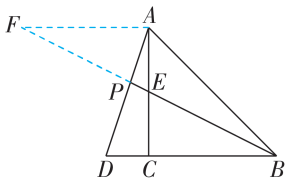
$\because AF//BC$,$\therefore \triangle AFE\backsim\triangle CBE$,

$\therefore \frac{AF}{BC}=\frac{AE}{CE}=1$,$\therefore AF=BC=3y$.

$\because AF//BC$,$\therefore \triangle AFP\backsim\triangle DBP$,

$\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{AF}{BD}=\frac{3y}{4y}=\frac{3}{4}$.

(3)$BP=\frac{48\sqrt{5}}{7}$. 如图(2),过点 A 作 $AF//BC$,交 BE 的延长线于点 F.



图(2)

$\because CD=4$,$AC=12$,$\therefore BC=12$,$AE=CE=6$,

$\therefore EB=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{144+36}=6\sqrt{5}$.

由(2)可知$\triangle AFE\backsim\triangle CBE$,$\therefore \frac{AE}{CE}=\frac{FE}{BE}=1$,

$\therefore BE=EF=6\sqrt{5}$,$\therefore BF=12\sqrt{5}$.

由(2)可知$\frac{AP}{DP}=\frac{FP}{BP}=\frac{3}{4}$,

$\therefore BP=\frac{4}{7}\times12\sqrt{5}=\frac{48\sqrt{5}}{7}$.

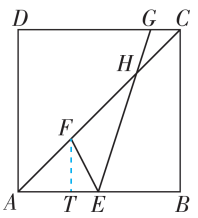
模型 14　母子型

1. D　【解析】$\because \angle ACB=90°$,$\angle ACD=3\angle BCD$,$\therefore \angle BCD=22.5°$,$\angle ACD=67.5°$. $\because \angle ACB=90°$,$CD\perp AB$,$\angle CBD=\angle ABC$,$\therefore \angle BDC=\angle ACB=90°$,$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle BAC$,$\therefore \angle BCD=\angle A=22.5°$. $\because E$ 为斜边 AB 的中点,$\therefore AE=CE=BE=4$,$\therefore \angle ECA=\angle A=22.5°$,$\therefore \angle CED=\angle A+\angle ECA=45°$. $\because CD\perp AB$,$\therefore CD=DE$,则 $CE=\sqrt{2}DE=4$,$\therefore DE=2\sqrt{2}$. 故选 D.

关键点拨

BC 为公共边,$\angle B$ 为公共角,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$,符合射影定理,证$\triangle BCD\backsim\triangle BAC$,根据直角三角形的性质计算.

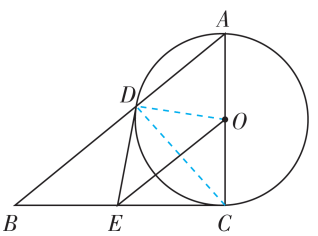
2. C　【解析】如图,过点 F 作 $FT\perp AB$ 于点 T. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore \angle B=90°$,$AB=BC=12$,$\angle DAC=\angle BAC=45°$,$\therefore AC=\sqrt{2}AB=12\sqrt{2}$. $\because \frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$,$\therefore AF=4\sqrt{2}$. $\because FT\perp AB$,$\therefore \angle ATF=90°$,$\therefore \angle FAT=\angle AFT=45°$,$\therefore AT=FT=4$. $\because AE=EB=6$,$\therefore ET=AE-AT=6-4=2$,$\therefore EF=\sqrt{ET^2+FT^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 设 $EH=x$,$FH=y$. $\because \angle EHF=\angle AHE$,$\angle HEF=\angle EAH=45°$,$\therefore \triangle EHF\backsim\triangle AHE$,$\therefore \frac{EF}{AE}=\frac{HE}{HA}=\frac{HF}{EH}$,$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{x}{y+4\sqrt{2}}=\frac{y}{x}$,解得 $x=3\sqrt{10}$,$y=5\sqrt{2}$,$\therefore FH=5\sqrt{2}$,$\therefore CH=AC-AF-FH=12\sqrt{2}-4\sqrt{2}-5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. 故选 C.



关键点拨

EH 为公共边,$\angle EHF$ 为公共角,$\angle HEF=\angle EAH=45°$,符合一般母子型相似,证$\triangle EHF\backsim\triangle AHE$.

3. C　【解析】连接 CD,DO,如图.



$\because \angle ACB=90°$,$\therefore \angle OCD+\angle DCE=90°$,$\angle B+\angle A=90°$. $\because OA=OD$,$EB=ED$,$\therefore \angle A=\angle ADO$,$\angle B=\angle BDE$,$\therefore \angle ADO+\angle BDE=90°$,$\therefore \angle ODE=180°-(\angle ADO+\angle BDE)=90°$,$\therefore \angle ODC+\angle EDC=90°$. $\because OD=OC$,$\therefore \angle ODC=\angle OCD$,$\therefore \angle EDC=\angle DCE$,$\therefore ED=EC$,$\therefore ED=EC=BE=4$,$\therefore BC=BE+EC=8$. $\because AC$ 是$\odot O$ 的直

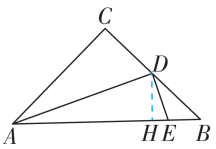
径，∴ $\angle ADC=90°$，∴ $\angle BDC=180°-\angle ADC=90°$，∴ $\angle BDC=\angle ACB=90°$. ∵ $\angle B=\angle B$，∴ $\triangle BDC\backsim\triangle BCA$，∴ $\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{BA}$，∴ $\frac{2\sqrt{7}}{8}=\frac{8}{BA}$，∴ $BA=\frac{32\sqrt{7}}{7}$，∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{\left(\frac{32\sqrt{7}}{7}\right)^2-8^2}=\frac{24\sqrt{7}}{7}$，∴ ⊙$O$ 的半径为$\frac{12\sqrt{7}}{7}$，故选 C.

4. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AB=CD=1$，$\angle ABC=90°$. ∵ $BE\perp AC$，∴ $\angle AGB=90°=\angle ABC$. ∵ $\angle BAG=\angle CAB$，∴ $\triangle ABG\backsim\triangle ACB$，∴ $\frac{AG}{AB}=\frac{AB}{AC}$，∴ $AG\cdot AC=AB^2$，即 $(AC-1)\cdot AC=1^2$，解得 $AC=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $AC=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（不合题意，舍去），即 AC 的长为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 故答案为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

思路分析

$\angle ABC=90°$，$BE\perp AC$，符合直角母子型相似模型，证$\triangle ABG\backsim\triangle ACB$，根据对应边成比例计算.

5. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　【解析】过 D 点作 $DH\perp AB$，垂足为 H，如图. ∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=2$，$\angle C=90°$，∴ $\angle CAB=\angle CBA=45°$，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$. ∵ D 为 BC 的中点，∴ $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{5}$. ∵ $DE\perp AD$，$DH\perp AB$，$\angle B=45°$，



∴ $DH=HB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，易证得 $AD^2=AH\cdot AE$，∴ $AE=\frac{AD^2}{AH}=\frac{(\sqrt{5})^2}{2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$，$EB=AB-AE=2\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故答案为$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

6. $\frac{27}{8}$　【解析】根据正方形的性质，得 $AD=DC$，$\angle ADC=\angle DAE=90°$. ∵ $AF\perp DE$，$CG\perp DE$，∴ $\angle AFD=\angle CGD=90°$，∴ $\angle ADF+\angle CDG=\angle ADF+\angle DAF$，∴ $\angle CDG=\angle DAF$，∴ $\triangle CDG\cong\triangle DAF$（AAS），∴ $AF=DG=\sqrt{CD^2-CG^2}=3$，$DF=CG=4$. 同理可得 $\angle EAF=\angle ADF$. 又∵ $\angle AFE=\angle AFD$，∴ $\triangle AFE\backsim\triangle DFA$，∴ $\frac{AF}{DF}=\frac{EF}{AF}$，即 $\frac{3}{4}=\frac{EF}{3}$，∴ $EF=\frac{9}{4}$，∴ $\triangle AEF$ 的面积为$\frac{1}{2}EF\cdot AF=\frac{27}{8}$. 故答案为$\frac{27}{8}$.

7.【解】(1)点 D 是$\triangle ABC$ 的“理想点”. 理由如下：

∵ D 是边 AB 的中点，$AB=2$，

∴ $AD=BD=1$.

∵ $AC=\sqrt{2}$，

∴ $AC^2=2=AD\cdot AB$，

∴ $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$.

又∵ $\angle A=\angle A$，

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，

∴ $\angle ACD=\angle B$，

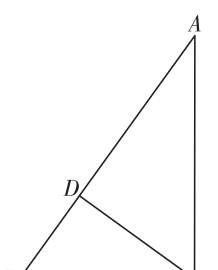
∴ 点 D 是$\triangle ABC$ 的“理想点”.

(2)根据题意，分情况讨论：

①当点 D 在 AB 边上时，如图(1).

∵ 点 D 是 $\triangle ABC$ 的“理想点”，

∴ $\angle ACD=\angle B$ 或 $\angle BCD=\angle A$.



图(1)

当 $\angle ACD=\angle B$ 时，

∵ $\angle ACD+\angle BCD=90°$，

∴ $\angle BCD+\angle B=90°$，

∴ $\angle CDB=90°$，

∴ CD 是 AB 边上的高.

当 $\angle BCD=\angle A$ 时，同理可证 $\angle CDB=90°$，

∴ CD 是 AB 边上的高.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=5$，$AC=4$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=3$.

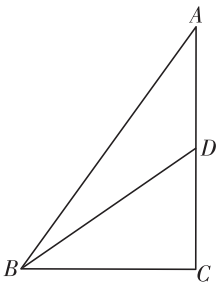
$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$，$\therefore CD=\frac{12}{5}$.

②$\because AC=4$，$BC=3$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore AC>BC$，则$\angle ACB>\angle ABC>\angle A$，

$\therefore$“理想点”D不可能在BC边上.

③当点D在AC边上时，如图(2).



图(2)

$\because$点D是$\triangle ABC$的“理想点”，

$\therefore \angle DBC=\angle A$.

又$\because \angle C=\angle C$，

$\therefore \triangle BDC\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AC}$，即$\frac{CD}{3}=\frac{3}{4}$，

$\therefore CD=\frac{9}{4}$.

综上所述，CD的长为$\frac{12}{5}$或$\frac{9}{4}$.

8. (1)【证明】$\because BD\perp CD$，$CE\perp BC$，

$\therefore \angle EDC=\angle ECB=90°$.

又$\because \angle CED=\angle BEC$，$\therefore \triangle CED\backsim\triangle BEC$.

(2)【证明】由(1)可知$\triangle CED\backsim\triangle BEC$，

$\therefore \frac{ED}{EC}=\frac{EC}{EB}$. $\because EA=EC$，$\therefore \frac{ED}{EA}=\frac{EA}{EB}$.

又$\because \angle AED=\angle BEA$，$\therefore \triangle AED\backsim\triangle BEA$，

$\therefore \frac{ED}{EA}=\frac{AD}{AB}$.

$\because EA=EC$，$AB=CD$，$\therefore \frac{ED}{AD}=\frac{EC}{CD}$.

(3)【解】延长AD交EC于F. 设$EF=a$，$FC=b$.

$\because AD//BC$，$CE\perp BC$，

$\therefore \angle AFE=90°$.

$\because CD\perp DE$，$\therefore$易得$\triangle EFD\backsim\triangle DFC\backsim\triangle EDC$，

$\therefore DF^2=EF\cdot FC$，$DE^2=EF\cdot EC$，$DC^2=EC\cdot FC$，

$\therefore DF=\sqrt{ab}$，$DE=\sqrt{a(a+b)}$，$CD=\sqrt{b(a+b)}$.

$\because \frac{ED}{AD}=\frac{EC}{CD}$，$\therefore \frac{\sqrt{a(a+b)}}{AD}=\frac{a+b}{\sqrt{b(a+b)}}$，

$\therefore AD=\sqrt{ab}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle EAF$中，$AE^2=AF^2+EF^2$，

即$(a+b)^2=(2\sqrt{ab})^2+a^2$，

则$b=2a$，

$\therefore \tan\angle EAD=\frac{EF}{AF}=\frac{a}{2\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

9. (1)【证明】$\because \angle ACD=\angle B$，$\angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle ACB$，

$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，

$\therefore AC^2=AD\cdot AB$.

【解】(2)$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD=BC$，$\angle A=\angle C$.

又$\because \angle BFE=\angle A$，$\therefore \angle BFE=\angle C$.

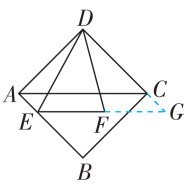
又$\because \angle FBE=\angle CBF$，$\therefore \triangle BFE\backsim\triangle BCF$，

$\therefore \frac{BF}{BC}=\frac{BE}{BF}$，

$\therefore BC=\frac{BF^2}{BE}=\frac{16}{3}$，

$\therefore AD=BC=\frac{16}{3}$.

(3)如图，分别延长EF，DC相交于点G.



$\because$四边形$ABCD$是菱形，

$\therefore AB//DC$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD$.

又$AC//EF$，$\therefore$四边形$AEGC$为平行四边形，

$\therefore AC=EG$，$CG=AE=2$，$\angle EAC=\angle G$.

$\because \angle EDF=\frac{1}{2}\angle BAD$，

$\therefore \angle EDF=\angle BAC$，

$\therefore \angle EDF=\angle G$.

又$\because \angle DEF=\angle GED$，

$\therefore \triangle EDF\backsim\triangle EGD$，

$\therefore \frac{DE}{EG}=\frac{EF}{DE}=\frac{DF}{DG}$，$\therefore DE^2=EF\cdot EG$.

又$\because EG=AC=2EF$，

$\therefore DE^2=2EF^2$，$\therefore DE=\sqrt{2}EF$.

又$\because \frac{DG}{DF}=\frac{DE}{EF}=\sqrt{2}$，$\therefore DG=\sqrt{2}DF=5\sqrt{2}$，

$\therefore DC=DG-CG=5\sqrt{2}-2$.

即菱形$ABCD$的边长为$5\sqrt{2}-2$.

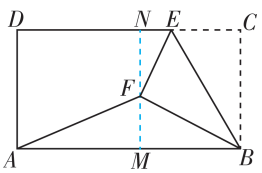
思路分析

(1)符合母子型相似模型,证得$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$,根据对应边成比例即可得证.(2)结合平行四边形的性质得到$\angle A=\angle C$,则可用母子型相似模型证得$\triangle BFE\backsim\triangle BCF$,得到对应边成比例,进一步求解即可.(3)分别延长EF,DC相交于点G,构造母子型相似模型,通过证明$\triangle EDF\backsim\triangle EGD$,得到$DE$,$EF$,$EG$的数量关系,然后结合$EG=AC=2EF$,得到$DE$,$EF$的数量关系,根据$\frac{DG}{DF}=\frac{DE}{EF}$,求出$DG$的长,进而求得$DC$的长.

模型 15　一线三等角型

1. 5　【解析】∵$\triangle ABC$是等边三角形,∴$BC=AC$,$\angle B=\angle C=60°$,∴$\angle CAD+\angle ADC=120°$.∵$\angle ADE=60°$,∴$\angle BDE+\angle ADC=120°$,∴$\angle CAD=\angle BDE$,∴$\triangle ADC\backsim\triangle DEB$,∴$\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{DB}$.∵$BD=4DC$,设$DC=x$,则$BD=4x$,∴$BC=AC=5x$,∴$\frac{AD}{4}=\frac{5x}{4x}$,∴$AD=5$,故答案为 5.

2. C　【解析】如图,过点F作$MN/\!/AD$,交AB于点M,交CD于点N,则$MN\perp AB$,$MN\perp CD$.由折叠可得,$EC=EF$,$BC=BF=\sqrt{5}$,$\angle C=\angle BFE=90°$.在Rt$\triangle AMF$中,$\tan\angle BAF=\frac{FM}{AM}=\frac{1}{2}$,∴设$FM=x$,则$AM=2x$,∴$BM=4-2x$.在Rt$\triangle BFM$中,由勾股定理得$FM^2+BM^2=BF^2$,即$x^2+(4-2x)^2=(\sqrt{5})^2$,解得$x=1$或$x=\frac{11}{5}$(舍去),∴$FM=1$,$AM=BM=2$,$FN=MN-FM=BC-FM=\sqrt{5}-1$.∵$\angle EFN+\angle FEN=\angle EFN+\angle BFM=90°$,∴$\angle FEN=\angle BFM$.又∵$\angle FNE=\angle BMF$,∴$\triangle EFN\backsim\triangle FBM$,∴$\frac{EF}{BF}=\frac{FN}{BM}$,即$\frac{EF}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,解得$EF=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$,∴$EC=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.故选 C.



关键点拨

添加辅助线,$\angle ENF=\angle BFE=\angle BMF=90°$,符合一线三等角相似模型,证$\triangle EFN\backsim\triangle FBM$.

3. 6　【解析】∵$AB=AC$,∴$\angle C=\angle B$,∴$\angle C+\angle B+\angle BAC=2\angle C+\angle BAC=180°$.∵$2\angle ADE+\angle BAC=180°$,∴$\angle C=\angle ADE$.又∵$\angle BDE+\angle ADC=180°-\angle ADE$,$\angle CAD+\angle ADC=180°-\angle C$,∴$\angle BDE=\angle CAD$,∴$\triangle BDE\backsim\triangle CAD$,∴$\frac{BE}{CD}=\frac{DB}{AC}$,即$\frac{4}{CD}=\frac{12-CD}{9}$,解得$CD=6$.故答案为 6.

4. 5　【解析】∵$\angle ACB=90°$,$\angle A=45°$,∴$\angle B=90°-\angle A=45°$,∴$AC=BC$,$\angle BFD+\angle BDF=135°$.设$AC=BC=x$,则$AB=\sqrt{2}AC=\sqrt{2}x$.∵$D$为$AB$的中点,∴$AD=BD=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.∵$\angle EDF=45°$,∴$\angle BDF+\angle ADE=135°$,∴$\angle ADE=\angle BFD$.∵$\angle A=\angle B=45°$,∴$\triangle AED\backsim\triangle BDF$,∴$\frac{AE}{DB}=\frac{AD}{BF}$,∴$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x+3}$,解得$x=6$或$x=-2$(不符合题意,舍去).∴$AC=BC=6$,∴$CE=AC-AE=6-2=4$.在Rt$\triangle CEF$中,$CF=3$,∴$EF=\sqrt{CE^2+CF^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.故答案为 5.

关键点拨

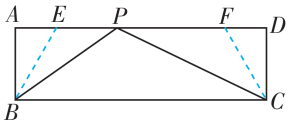
$\angle EDF=\angle A=\angle B$,符合一线三等角模型,证$\triangle AED\backsim\triangle BDF$.

5. (1) 2　(2)$y=\frac{1}{x-1}$　【解析】(1)∵点F为CD边的中点,∴$DC=2DF$.∵四边形$ABCD$是矩形,∴$AB=DC$,$\angle B=\angle C=\angle D=90°$,∴$\angle FEC+\angle EFC=90°$.由折叠得$BE=EF$,$AB=AF$,$\angle B=\angle AFE=90°$,∴$AB=AF=DC=2DF$,$\angle EFC+\angle AFD=90°$,∴$\angle AFD=\angle FEC$,∴$\triangle AFD\backsim\triangle FEC$,∴$\frac{EF}{EC}=\frac{AF}{FD}=2$,∴$\frac{BE}{EC}=2$,∴$x=2$.故答案为 2.

(2)由(1)可得$AB=AF=DC=DF+CF$,$\triangle AFD\backsim$

$\triangle FEC$，$\therefore \dfrac{EF}{EC}=\dfrac{AF}{FD}$，$\therefore \dfrac{BE}{EC}=\dfrac{DC}{DF}$，$\therefore x=\dfrac{DF+FC}{DF}=1+\dfrac{FC}{DF}=1+\dfrac{1}{y}$，$\therefore y=\dfrac{1}{x-1}$. 故答案为 $y=\dfrac{1}{x-1}$.

6. 【解】如图，在 AD 上分别取点 E，F，使 $\angle ABE=\angle DCF=30°$.



∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore \angle A=\angle D=90°$，

$\therefore \angle BEP=\angle BPC=\angle PFC=120°$.

∵ $\angle EPB+\angle FPC=180°-120°=60°$，$\angle EPB+\angle EBP=180°-120°=60°$，

$\therefore \angle FPC=\angle EBP$，$\therefore \triangle BEP\backsim\triangle PFC$，

$\therefore \dfrac{BE}{PF}=\dfrac{EP}{FC}$.

设 $AB=CD=m$，则易得 $\dfrac{\frac{2m}{\sqrt{3}}}{4-\frac{m}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2-\frac{m}{\sqrt{3}}}{\frac{2m}{\sqrt{3}}}$，

解得 $m=\sqrt{11}-\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}-\sqrt{11}$（舍去），

$\therefore AB=\sqrt{11}-\sqrt{3}$.

关键点拨

在 AD 上分别取点 E，F，使 $\angle ABE=\angle DCF=30°$，则 $\angle BEP=\angle BPC=\angle PFC=120°$，符合一线三等角模型，证 $\triangle BEP\backsim\triangle PFC$.

7. (1)【证明】∵ $\angle DPC=90°$，

$\therefore \angle BPC+\angle APD=90°$.

∵ $\angle A=90°$，$\therefore \angle ADP+\angle APD=90°$，

$\therefore \angle ADP=\angle BPC$.

又∵ $\angle A=\angle B=90°$，$\therefore \triangle ADP\backsim\triangle BPC$，

$\therefore AD:BP=AP:BC$，$\therefore AD\cdot BC=AP\cdot BP$.

【解】(2)结论 $AD\cdot BC=AP\cdot BP$ 还成立.

理由：∵ $\angle BPD=\angle DPC+\angle BPC$，

$\angle BPD=\angle A+\angle ADP$，

$\therefore \angle DPC+\angle BPC=\angle A+\angle ADP$.

∵ $\angle DPC=\angle A$，$\therefore \angle BPC=\angle ADP$.

又∵ $\angle A=\angle B$，$\therefore \triangle ADP\backsim\triangle BPC$，

$\therefore AD:BP=AP:BC$，

$\therefore AD\cdot BC=AP\cdot BP$.

(3)∵ $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle AED=\angle ADE=45°$.

∵ $\angle EFD=\angle B=\angle ADE=45°$，

$\therefore \angle BAD=\angle EDF$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle DFE$，

$\therefore AB:DF=AD:DE$.

∵ $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，$\therefore AD:DE=1:\sqrt{2}$，

$\therefore AB:DF=1:\sqrt{2}$.

∵ $AB=2\sqrt{2}$，$\therefore DF=4$.

∵ $\angle EFD=\angle AED=45°$，

$\therefore \angle DEC=\angle EFC=180°-45°=135°$.

又∵ $\angle C=\angle C$，$\therefore \triangle DEC\backsim\triangle EFC$，

$\therefore DC:EC=EC:CF$，即 $EC^2=FC(4+FC)$.

∵ $EC=\sqrt{5}$，$\therefore 5=FC(4+FC)$，

$\therefore FC=1$（负值已舍去），$\therefore CD=5$.

8. (1)【证明】∵ $AM\perp MN$，$CN\perp MN$，

$\therefore \angle AMB=\angle BNC=90°$，

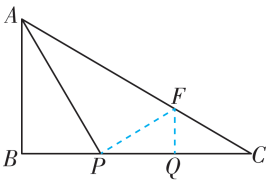
$\therefore \angle BAM+\angle ABM=90°$.

∵ $\angle ABC=90°$，$\therefore \angle ABM+\angle CBN=90°$，

$\therefore \angle BAM=\angle CBN$.

又∵ $\angle AMB=\angle CNB$，$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle BCN$.

(2)【解】如图(1)，过点 P 作 $PF\perp AP$ 交 AC 于点 F，过点 F 作 $FQ\perp BC$ 于点 Q.



图（1）

在 Rt$\triangle AFP$ 中，$\tan\angle PAC=\dfrac{PF}{AP}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

同(1)得 $\angle BAP=\angle FPQ$，$\triangle ABP\backsim\triangle PQF$，

$\therefore \dfrac{AB}{PQ}=\dfrac{BP}{FQ}=\dfrac{AP}{PF}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

设 $AB=\sqrt{5}a$，$PQ=2a(a>0)$.

∵ $\angle BAP=\angle C=\angle FPQ$，$\therefore PF=CF$.

又∵ $FQ\perp BC$，$\therefore PQ=CQ=2a$，

$\therefore BC=BP+PQ+CQ=BP+2a+2a=4a+BP$.

∵ $\angle BAP=\angle C$，$\angle B=\angle B$，

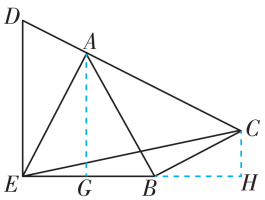
$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle CBA$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BP}{AB}$，

$\therefore BP\cdot BC=AB^2$，即 $BP(4a+BP)=(\sqrt{5}a)^2$，

$\therefore BP=a$，$BC=5a$.

在 Rt△ABC 中，$\tan C=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}a}{5a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3)【解】$\tan\angle BEC=\frac{3}{14}$. 如图(2)，过点 A 作 $AG\perp BE$ 于点 G，过点 C 作 $CH\perp BE$ 交 EB 的延长线于点 H.



图(2)

∵ $\angle DEB=90°$，

∴ $CH//AG//DE$，

∴ $\frac{GH}{EG}=\frac{AC}{AD}=\frac{5}{2}$.

同(1)得 △ABG ∽ △BCH，

∴ $\frac{BG}{CH}=\frac{AG}{BH}=\frac{AB}{BC}$.

在 Rt△ABC 中，$\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5}$，

∴ 易得 $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$，

∴ $\frac{BG}{CH}=\frac{AG}{BH}=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3}$.

设 $BG=4m$，$CH=3m$，$AG=4n$，$BH=3n$.

∵ $AB=AE$，$AG\perp BE$，∴ $EG=BG=4m$，

∴ $\frac{GH}{EG}=\frac{4m+3n}{4m}=\frac{5}{2}$，∴ $n=2m$，

∴ $EH=EG+GH=4m+4m+3n=8m+3n=8m+6m=14m$，

∴ 在 Rt△CEH 中，$\tan\angle BEC=\frac{CH}{EH}=\frac{3}{14}$.

关键点拨

(1)$AM\perp MN$，$CN\perp MN$，$\angle ABC=90°$，符合一线三垂直相似模型，证△ABM∽△BCN；(2)(3)作垂线构造一线三垂直相似模型.

模型 16　旋转型

1. (1)【证明】∵ $AB=BC$，$AM=MN$，∴ $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$.

又∵ $\angle ABC=\angle AMN$，∴ △ABC∽△AMN.

(2)【解】$AC=3CN$.

理由如下：

∵ △ABC∽△AMN，

∴ $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$，即 $\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AN}$.

∵ $\angle AMN=\angle ABC$，$AB=BC$，$AM=MN$，

∴ $\angle BAC=\angle MAN$，

即 $\angle BAM+\angle MAC=\angle MAC+\angle CAN$，

∴ $\angle BAM=\angle CAN$，

∴ △BAM∽△CAN，∴ $\frac{BM}{CN}=\frac{AB}{AC}$，∴ $\frac{BM}{AB}=\frac{CN}{AC}$.

又∵ $CM=2BM$，∴ $AB=BC=3BM$，∴ $AC=3CN$.

思路分析

$BA=BC$，$AM=MN$，$\angle AMN=\angle ABC$，符合旋转型相似模型，证△ABC∽△AMN，再证明△ABM∽△ACN，利用相似三角形的性质计算.

2. B　【解析】连接 BB'. ∵ $\angle BAC=30°$，$\angle ACB=90°$，∴ $\cos 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∵ △$ABC$∽△$AB'C'$，∴ $\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$，$\angle ACB=\angle AC'B'=90°$，$\angle BAC=\angle B'AC'=30°$，∴ $\angle BAC+\angle CAB'=\angle B'AC'+\angle CAB'$，∴ $\angle BAB'=\angle CAC'$，∴ △BAB'∽△CAC'，∴ $\angle BB'A=\angle CC'A$，$\frac{CC'}{BB'}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由平移得 $CC'=B'E=\sqrt{6}$，$CC'//B'E$，∴ $\frac{B'E}{BB'}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ∵ $CC'//B'E$，∴ $\angle CC'B'+\angle AB'C'+\angle BB'A+\angle BB'E=180°$，∴ $\angle CC'B'+\angle AB'C'+\angle CC'A+\angle BB'E=180°$，∴ $\angle AC'B'+\angle AB'C'+\angle BB'E=180°$. ∵ $\angle AC'B'=90°$，$\angle B'AC'=30°$，∴ $\angle AB'C'=90°-\angle B'AC'=60°$，∴ $\angle BB'E=30°$，∴ $\angle BB'E=\angle CAB$，∴ △BCA∽△BEB'，∴ $\angle BEB'=\angle ACB=90°$，∴ $BE=B'E\cdot\tan 30°=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$. 故选 B.

3. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　【解析】连接 EC. ∵ $\angle ADE=\angle BDC=90°$，$\angle DAB=\angle DBC=30°$，∴ $\frac{AD}{DE}=\frac{BD}{CD}=\sqrt{3}$. ∵ $\angle ADB=\angle ADE+\angle EDB$，$\angle EDC=\angle BDC+\angle EDB$，∴ $\angle ADB=\angle EDC$，∴ △ABD∽△ECD，∴ $\frac{AB}{EC}=\frac{AD}{DE}=\sqrt{3}$，$\angle ABD=\angle ECD$. ∵ $\angle DBC+\angle DCB=90°$，∴ $\angle DBC+\angle ECB+$

$\angle EBD=90°$，$\therefore\ \angle BEC=90°$. $\because\ AB=4$，$\therefore\ EC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. $\because\ AC=2\sqrt{3}$，$\therefore\ AE=\sqrt{AC^2-EC^2}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$，

$\therefore\ DE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

4. $4-2\sqrt{2}$　【解析】$\because\ AC=BC=2$，$\angle ACB=90°$，$\therefore\ \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\therefore\ \angle BAC=45°$，$AB:AC=\sqrt{2}:1$. $\because\ \triangle ADE$ 是等腰直角三角形，$\therefore\ \angle DAE=45°$，$AD:AE=\sqrt{2}:1=AB:AC$. 又$\because\ \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，$\therefore\ \angle BAD=\angle CAE$，$\therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle ACE$. $\because\ \triangle CEF$ 与 $\triangle ABD$ 相似，且 $\angle ECF=\angle ACE$，$\therefore\ \triangle ECF\backsim\triangle ACE$，$\therefore\ \angle CEF=\angle CAE$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DCF$ 中，$\because\ \angle AEF=\angle DCF=90°$，$\angle AFE=\angle DFC$，$\therefore\ \angle EAF=\angle CDF$，$\therefore\ \angle CEF=\angle CDF$，$\therefore\ CE=CD$. 设 $BD=x$，则 $CD=CE=2-x$. $\because\ \triangle ABD\backsim\triangle ACE$，$\therefore\ BD:CE=AB:AC=\sqrt{2}:1$，即 $x:(2-x)=\sqrt{2}:1$，解得 $x=4-2\sqrt{2}$，$\therefore\ BD=4-2\sqrt{2}$. 故答案为 $4-2\sqrt{2}$.

思路分析

$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$AB:AC=AD:AE=\sqrt{2}:1$，$\angle BAD=\angle CAE$，符合旋转型相似模型，证 $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$，结合 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABD$ 相似，得 $\triangle ECF\backsim\triangle ACE$，利用相似的性质计算.

5.【解】(1)$\because\ \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}=\frac{3}{4}$，$\angle ABC=\angle ADE=90°$，

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle ADE$，

$\therefore\ \angle BAC=\angle DAE$，$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{3}{5}$，

$\therefore\ \angle CAE=\angle BAD$，

$\therefore\ \triangle CAE\backsim\triangle BAD$，

$\therefore\ \frac{BD}{CE}=\frac{AD}{AE}=\frac{3}{5}$.

(2)由(1)得 $\triangle CAE\backsim\triangle BAD$，

$\therefore\ \angle ACE=\angle ABD$.

$\because\ \angle AGC=\angle BGF$，

$\therefore\ \angle BFC=\angle BAC$，

$\therefore\ \sin\angle BFC=\sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{4}{5}$.

6.【解】(1)①在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 中，$CA=CB$，$CD=CE$，$\angle ACB=\angle DCE=50°$，

$\therefore\ \angle ACB+\angle ACE=\angle DCE+\angle ACE$，

$\therefore\ \angle BCE=\angle ACD$.

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，$\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACD=\angle BCE,\\ CD=CE,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle BCE(\mathrm{SAS})$，$\therefore\ AD=BE$，$\therefore\ \frac{AD}{BE}=1$.

故答案为 1.

②根据①得 $\angle CBE=\angle CAD$.

$\because\ \angle AMB=180°-\angle MAB-\angle ABM$，

$\therefore\ \angle AMB=180°-\angle CAB-\angle CAD-\angle ABM$，

$\therefore\ \angle AMB=180°-\angle CAB-\angle CBE-\angle ABM$，

$\therefore\ \angle AMB=180°-\angle CAB-\angle CBA$，

$\therefore\ \angle AMB=\angle ACB=50°$，故答案为 50°.

(2)设 $BC=a$，$EC=b$.

在 $\triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 中，$\angle ACB=\angle DCE=90°$，$\angle CAB=\angle CDE=30°$，

$\therefore\ AB=2a$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3}a$，$DE=2b$，$DC=\sqrt{DE^2-EC^2}=\sqrt{3}b$.

$\because\ \angle ACB=\angle DCE=90°$，

$\therefore\ \angle ACB+\angle ACE=\angle DCE+\angle ACE$，

$\therefore\ \angle BCE=\angle ACD$.

$\because\ \frac{BC}{AC}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{EC}{DC}=\frac{b}{\sqrt{3}b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\ \frac{BC}{AC}=\frac{EC}{DC}$，$\therefore\ \triangle BCE\backsim\triangle ACD$，

$\therefore\ \frac{AD}{BE}=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$.

根据 $\triangle BCE\backsim\triangle ACD$ 得 $\angle CBE=\angle CAD$.

$\because\ \angle AMB=180°-\angle MAB-\angle ABM$，

$\therefore\ \angle AMB=180°-\angle CAB-\angle CAD-\angle ABM$，

$\therefore\ \angle AMB=180°-\angle CAB-\angle CBE-\angle ABM$，

$\therefore\ \angle AMB=180°-\angle CAB-\angle CBA$，

$\therefore\ \angle AMB=\angle ACB=90°$.

(3)$AD=3\sqrt{3}$ 或 $AD=2\sqrt{3}$. 由(2)知 $\frac{AD}{BE}=\sqrt{3}$，

设 $BE=x$，则 $AD=\sqrt{3}x$.

如图(1)，$\because\ CE=1$，$CB=\sqrt{7}$，

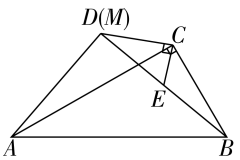
$\therefore DE=2CE=2,AB=2CB=2\sqrt{7}$,

$\therefore BD=x+2$.

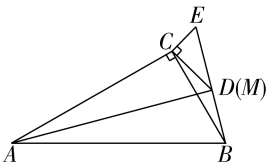
$\because \angle AMB=90°,\therefore (\sqrt{3}x)^2+(2+x)^2=(2\sqrt{7})^2$,

整理得 $x^2+x-6=0$,

解得 $x_1=2,x_2=-3$(舍去),此时 $AD=\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$.



图(1)



图(2)

如图(2),$\because CE=1,CB=\sqrt{7}$,

$\therefore DE=2CE=2,AB=2CB=2\sqrt{7}$,

$\therefore BD=x-2$.

$\because \angle AMB=90°,\therefore (\sqrt{3}x)^2+(x-2)^2=(2\sqrt{7})^2$,

整理得 $x^2-x-6=0$,

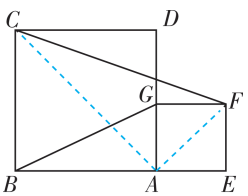
解得 $x_1=3,x_2=-2$(舍去),此时 $AD=\sqrt{3}x=3\sqrt{3}$.

综上所述,$AD=3\sqrt{3}$或 $AD=2\sqrt{3}$.

7.【解】(1)如图(1),连接 AC,AF.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形,

$\therefore \angle ABC=\angle BAD=90°$,



图(1)

$\angle AGF=\angle EAG=90°,\angle ACB=\angle CAD=45°$,

$\angle GAF=45°,AB=BC,AG=GF,AC=\sqrt{2}AB,AF=\sqrt{2}AG$,

$\therefore \angle CAF=\angle CAD+\angle GAF=90°,\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AG}=\sqrt{2}$,

$\therefore \angle BAD=\angle CAF,\therefore \triangle ABG\backsim\triangle ACF$,

$\therefore \dfrac{CF}{BG}=\dfrac{AF}{AG}=\sqrt{2}$. 故答案为$\sqrt{2}$.

(2)$CF=\sqrt{2}BG$. 证明如下:

连接 AC,AF. 同(1)可得,$\angle BAC=\angle GAF=45°,\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AF}{AG}=\sqrt{2}$,

$\therefore \angle BAC+\angle CAG=\angle GAF+\angle CAG$,

$\therefore \angle BAG=\angle CAF$,

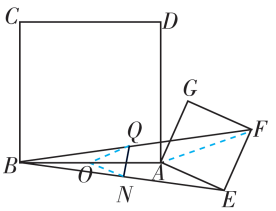
$\therefore \triangle ABG\backsim\triangle ACF,\therefore \dfrac{CF}{BG}=\dfrac{AF}{AG}=\sqrt{2},\therefore CF=\sqrt{2}BG$.

(3)如图(2),取 AB 中点 O,连接 ON,OQ,AF.

$\because$ 点 N 是 BE 的中点,点 Q 是 BF 的中点,

$\therefore ON=\dfrac{1}{2}AE=3$,

$OQ=\dfrac{1}{2}AF=3\sqrt{2}$,



图(2)

$\therefore$ 点 N 在以 O 为圆心,3 为半径的圆上,点 Q 在以 O 为圆心,$3\sqrt{2}$ 为半径的圆上,

$\therefore NQ$ 扫过的图形是圆环,其面积为 $\pi\cdot OQ^2-\pi\cdot ON^2=\pi\cdot(3\sqrt{2})^2-\pi\cdot3^2=9\pi$.

模型 17　半角模型

1.【证明】$\because \triangle PCD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle PCD=\angle PDC=\angle CPD=60°$,

$\therefore \angle ACP=\angle PDB=120°,\angle A+\angle APC=60°$.

$\because \angle APB=120°,\therefore \angle APC+\angle BPD=60°$,

$\therefore \angle BPD=\angle A$,

$\therefore \triangle ACP\backsim\triangle PDB,\therefore \dfrac{AC}{PD}=\dfrac{CP}{DB}$.

$\because \triangle PCD$ 是等边三角形,$\therefore PC=PD=CD$,

$\therefore \dfrac{AC}{CD}=\dfrac{CD}{BD},\therefore CD^2=AC\cdot BD$.

2. C　**【解析】**$\because \angle ACB=90°,AC=BC,\therefore \angle A=\angle B=45°$. $\because \angle DCE=45°,\therefore \angle BCD=\angle DCE+\angle ECB=45°+\angle ECB$. $\because \angle AEC=\angle B+\angle ECB=45°+\angle ECB,\therefore \angle AEC=\angle BCD$. 又 $\because \angle A=\angle B,\therefore \triangle AEC\backsim\triangle BCD,\therefore \dfrac{AE}{BC}=\dfrac{AC}{BD}$,即 $AC\cdot BC=AE\cdot BD$. $\because AE\cdot BD=8,\therefore AC\cdot BC=8$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times8=4$. 故选 C.

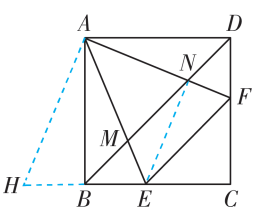
关键点拨

$\angle ACB=90°,\angle DCE=45°$,符合半角相似模型,证 $\triangle AEC\backsim\triangle BCD$,利用相似的性质计算.

3. D　**【解析】**如图(1),把 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90°得到 $\triangle ABH$.

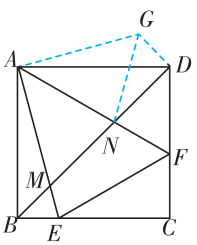
$\because AB=AD,\angle ADC=\angle ABH=\angle ABC=90°$,

$\therefore$ 点 H,B,C 共线. 由旋



图(1)

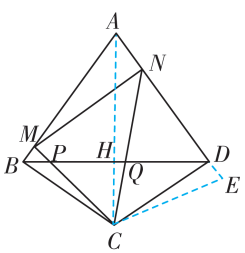
转的性质，得 $BH=DF$，$AH=AF$，$\angle BAH=\angle DAF$. ∵ $\angle EAF=45°$，∴ $\angle EAH=\angle BAH+\angle BAE=\angle DAF+\angle BAE=90°-\angle EAF=45°$，∴ $\angle EAH=\angle EAF$. 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEH$ 中，$\begin{cases}AF=AH,\\ \angle EAF=\angle EAH,\\ AE=AE,\end{cases}$ ∴ $\triangle AEF\cong\triangle AEH$（SAS），∴ $EF=EH$，$\angle AEB=\angle AEF$，故①正确. ∵ $\angle AMD=\angle ABD+\angle BAE=45°+\angle BAE$，$\angle NAB=\angle EAF+\angle BAE=45°+\angle BAE$，∴ $\angle NAB=\angle AMD$. 又 ∵ $\angle ABN=\angle ADM=45°$，∴ $\triangle ABN\backsim\triangle MDA$，故②正确. 如图（1），连接 NE. ∵ $\angle MAN=\angle MBE=45°$，$\angle AMN=\angle BME$，∴ $\triangle AMN\backsim\triangle BME$. ∵ $\angle MBE=\angle EAF=45°$，$\angle AEB=\angle AEF$，∴ $\triangle AFE\backsim\triangle BME$，∴ $\triangle AMN\backsim\triangle AFE$，∴ $\frac{AM}{AF}=\frac{AN}{AE}$，∴ $AM\cdot AE=AN\cdot AF$，故③正确. 如图（2），将 $\triangle ABM$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ADG$，连接 NG，∴ $\angle ADG=\angle ABM=45°$，$BM=DG$，∴ $\angle GDN=90°$，∴ $\triangle GDN$ 是直角三角形. 易证 $\triangle ANG\cong\triangle ANM$（SAS），∴ $MN=GN$，∴ $MN^2=NG^2=DN^2+DG^2=DN^2+BM^2$，故④正确. 综上，正确的结论有①②③④. 故选 D.



图（2）

4. 12 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle BAC=\angle ADB=45°$. ∵ 把 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转到 $\triangle AB'C'$，∴ $\angle EAF=\angle BAC=45°$，∴ $\angle EAF=\angle ADB$. ∵ $\angle AEF=\angle DEA$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle DEA$，∴ $\frac{AE}{DE}=\frac{EF}{AE}$，∴ $EF\cdot ED=AE^2$. ∵ $AE=2\sqrt{3}$，∴ $EF\cdot ED=12$. 故答案为 12.

5. 【解】（1）如图，连接 AC 交 BD 于 H.



∵ $AB=AD$，$CB=CD$，

∴ AC 垂直平分线段 BD，

∴ $BH=DH$.

∵ $AB=4$，$BC=3$，$\angle ABC=90°$，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

∴ $\sin\angle BCH=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5}$.

∵ $CB=CD$，$CH\perp BD$，

∴ $\angle BCH=\angle DCH$.

∵ $\angle MCN=\frac{1}{2}\angle BCD=\angle BCH$，∴ $\sin\angle MCN=\frac{4}{5}$.

（2）如图，延长 AD 到 E，使得 $DE=BM$，连接 CE.

∵ $BM=DE$，$\angle CBM=\angle CDE=90°$，$BC=DC$，

∴ $\triangle CBM\cong\triangle CDE$（SAS），∴ $\angle BCM=\angle DCE$，$CM=CE$，∴ $\angle MCE=\angle BCD$.

∵ $\angle MCN=\frac{1}{2}\angle BCD$，∴ $\angle MCN=\angle ECN$.

∵ $CM=CE$，$CN=CN$，∴ $\triangle MCN\cong\triangle ECN$（SAS），

∴ $\angle CNM=\angle CNE$. ∵ $DN=DC$，$\angle NDC=90°$，

∴ $\angle CND=\angle DCN=45°$，∴ $\angle CNM=45°$.

（3）不变，$\frac{PQ}{MN}=\frac{3}{5}$.

∵ $\angle CHD=\angle ADC=90°$，

∴ $\angle ACD+\angle CDH=90°$，$\angle ADH+\angle CDH=90°$，

∴ $\angle ACD=\angle ADH$.

∵ $\angle MCN=\frac{1}{2}\angle BCD=\angle ACD$，

∴ $\angle MCN=\angle ADH$.

∵ $\angle PQC=\angle NQD$，∴ $\angle CPQ=\angle QND$.

∵ $\angle CNE=\angle CNM$，∴ $\angle CPQ=\angle CNM$.

∵ $\angle PCQ=\angle NCM$，∴ $\triangle PCQ\backsim\triangle NCM$.

∵ $\triangle NCM\cong\triangle NCE$，

∴ $\triangle PCQ\backsim\triangle NCE$，$MN=NE$.

∵ $CH\perp PQ$，$CD\perp NE$，∴ $\frac{PQ}{NE}=\frac{CH}{CD}=\sin\angle CDH$.

∵ $\angle CDH+\angle ADH=90°$，$\angle CAD+\angle ADH=90°$，

∴ $\angle CDH=\angle CAD$，

∴ $\sin\angle CDH=\sin\angle CAD=\frac{3}{5}$，∴ $\frac{PQ}{MN}=\frac{PQ}{NE}=\frac{3}{5}$.

关键点拨

$\angle MCN=\frac{1}{2}\angle BCD$，符合半角相似模型，证 $\triangle PCQ\backsim\triangle NCE$，利用相似的性质求解.

6. 【解】（1）$\angle AFB+\angle BAD=90°$. 证明如下：

∵ $AB=AC$，$\angle BAC=90°$，∴ $\angle C=\angle B=45°$.

∵ $\angle DAF=45°$，∴ $\angle BAD+\angle CAF=45°$，

∴ $\angle CAF=45°-\angle BAD$.

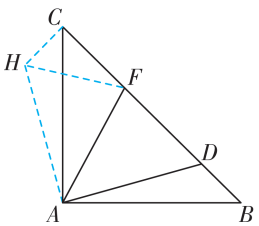
∵ $\angle AFB=\angle C+\angle CAF$，

∴ $\angle AFB=45°+45°-\angle BAD$，

∴ $\angle AFB+\angle BAD=90°$.

(2) $DF^2=CF^2+BD^2$. 证明如下：

如图，将 $\triangle ADB$ 绕点 A 逆时针旋转 $90°$，得到 $\triangle AHC$，连接 HF，



∴ $\triangle ADB\cong\triangle AHC$，

∴ $\angle DAB=\angle CAH$，

$AH=AD$，$DB=CH$，

$\angle B=\angle ACH=45°$，

∴ $\angle HCF=90°$，$\angle HAF=\angle HAC+\angle CAF=\angle DAB+\angle CAF=45°$，∴ $\angle HAF=\angle DAF=45°$.

又∵ $AH=AD$，$AF=AF$，∴ $\triangle ADF\cong\triangle AHF$(SAS)，

∴ $DF=HF$.

∵ $HF^2=CH^2+CF^2$，∴ $DF^2=CF^2+BD^2$.

(3) 设 $CF=a$，则 $BF=kCF=ka$，∴ $BC=a+ka$，

∴ $AC=AB=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+ka)$.

∵ $\angle AFB+\angle BAD=90°$，$\angle BAD+\angle CAD=90°$，

∴ $\angle CAD=\angle BFA$.

又∵ $\angle B=\angle C=45°$，∴ $\triangle DCA\backsim\triangle ABF$，

∴ $\frac{AC}{BF}=\frac{CD}{AB}=\frac{AD}{AF}$.

∵ $AF\perp GD$，$\angle DAF=45°$，

∴ $\angle DAF=\angle ADG=45°$.

又∵ $\angle DAC=\angle BFA$，∴ $\triangle FAD\backsim\triangle ADG$，

∴ $\frac{DF}{AG}=\frac{AD}{DG}=\frac{AF}{AD}$，

∴ $\frac{DF}{AG}=\frac{BF}{AC}=\frac{ka}{\frac{\sqrt{2}}{2}(k+1)a}=\frac{\sqrt{2}k}{k+1}$.

7. (1)【证明】∵ $AB=AD$，∴ 点 A 在线段 BD 的垂直平分线上.

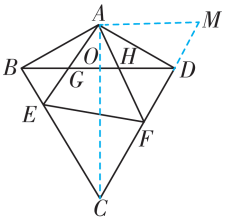
∵ $CB=CD$，∴ 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上.

∴ AC 垂直平分线段 BD.

(2)【证明】如图(1)，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 $120°$ 得到 $\triangle ADM$，连接 AC 交 BD 于 O，

∴ $\angle BAE=\angle DAM$，$AE=AM$.

易得 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$，



图(1)

∴ $\angle ABC=\angle ADC=90°$，

$\angle BAC=\angle DAC$.

∵ $\angle BCD=60°$，

∴ $\angle BAD=120°$.

∵ $\angle EAF=60°$，

∴ $\angle BAE+\angle DAF=\angle DAF+\angle DAM=60°$，

∴ $\angle FAE=\angle FAM$.

∵ $\angle ADM=\angle ABE=90°$，∴ $\angle ADM+\angle ADC=180°$，∴ 点 F，D，M，C 共线.

∵ $FA=FA$，$AE=AM$，∴ $\triangle FAE\cong\triangle FAM$，

∴ $\angle AFE=\angle AFM$.

∵ $\angle CAD=\angle CAB=60°=\angle EAF$，

∴ $\angle GAO=\angle DAF$.

∵ $\angle AGO+\angle GAO=90°$，$\angle AFD+\angle FAD=90°$，

∴ $\angle AGO=\angle AFD$，∴ $\angle AGH=\angle AFE$.

∵ $\angle GAH=\angle FAE$，∴ $\triangle AGH\backsim\triangle AFE$.

(3)【解】如图(2)，连接 AC 交 BD 于 O，作 $HM\perp AD$ 于 M.

∵ $EF\perp CD$，∴ $\angle EFD=90°$.

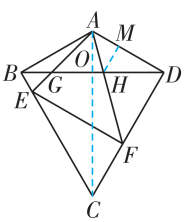
由(2)可知 $\angle AFD=\angle AFE=\angle AGO$.

∵ $\angle AFD+\angle AFE=90°$，

∴ $\angle AFD=\angle AFE=\angle AGO=45°$，∴ $AO=GO$.

∵ $\angle ADF=90°$，∴ $\angle FAD=45°$，

∴ $AD=DF$，$HM=AM$.



图(2)

设 $HM=AM=a$.

∵ $BC=CD$，$\angle BCD=60°$，

∴ 易得 $\angle ADB=30°$，

∴ $DH=2a$，$DM=\sqrt{3}a$.

在 Rt $\triangle ACD$ 中，易知 $\angle ACD=30°$，$AD=(1+\sqrt{3})a$，∴ $CD=BD=\sqrt{3}AD=(3+\sqrt{3})a$.

在 Rt $\triangle AOD$ 中，∵ $\angle ADO=30°$，$AD=(1+\sqrt{3})a$，

∴ $AO=OG=\frac{1}{2}AD=\frac{1+\sqrt{3}}{2}a$，$OD=\sqrt{3}OA=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a$，

∴ $BD=2OD=(3+\sqrt{3})a$，$OH=OD-DH=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a-2a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$，

∴ $GH=OG+OH=\sqrt{3}a$，∴ $\frac{GH}{BD}=\frac{\sqrt{3}a}{(3+\sqrt{3})a}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.